215

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

But : Généraliser la notion de dérivée à des fonctions de plusieurs variables afin d'approcher des fonctions suffisamment régulières par des fonctions linéaires au voisinage d'un point.

I Le premier ordre

1) Fonctions différentiables

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Déf : $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite différentiable en $a \in U$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \text{ lorsque } h \to 0.$$

Si une telle application φ existe elle est unique et s'appelle différentielle en a, notée Df_a.

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U.

Ex : • $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $Df_a = f$.

• $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle est dérivable en a ssi elle est différentiable en a et $Df_a(h) = f'(a).h$.

Déf : Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en $a \in U$, alors Df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui est donc caractérisée par un unique vecteur appelé gradient de f en a noté $\nabla f(a)$ vérifiant :

$$Df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Rq : Le gradient donne la direction de "la plus grande pente" de f en a.

Prop : Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ avec $f(U) \subset V$ et f différentiable en $a \in U$, g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} \circ Df_a.$$

Prop : La somme et le produit de deux fonctions différentiables en un point sont différentiables en ce point.

2) Dérivées partielles

Déf : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soient $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. f est dite dérivable selon le vecteur v si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = f'_v(a) \text{ existe.}$$

Prop : Si f est différentiable en $a \in U$, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et

$$f'_v(a) = Df_a(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^n.$$

App : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(tx) = t f(x)$.

Alors f est linéaire.

Rq : il se peut que f admette des dérivées selon tout vecteur et ne soit pas différentiable :

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad x \neq 0$$

$$f(0,y) = y$$

Déf : Soit $(e_1 \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle (lorsqu'elle existe) dérivée partielle d'indice i en a la dérivée de f en a selon e_i :

$$f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

L'hypothèse d'existence de dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité : plus de régularité est nécessaire.

3) Fonction continûment différentiables

Déf : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. f est dite continûment différentiable (de classe C^1) si elle est différentiable sur U et si $Df : a \mapsto Df_a$ est continue.

Th : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en un point $a \in U$, alors f est différentiable en a et

$$Df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n$$

Rq : Dans ce cas, f est même C^1.

4) Application : théorème des accroisements finis

Th : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $[a,b] \subseteq U$
Si f est continue sur $[a,b]$, différentiable en tout point de $]a,b[$ alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} \|Df_x\| \; \|b-a\|$$

App : Si U est ouvert connexe et $Df_x = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.

II Théorèmes d'inversion

Déf : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$. On dit que f est un C^1-difféomorphisme si f est bijective, de classe C^1 et si f^{-1} est de classe C^1.

Prop : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. S'il existe $a \in U$ tel que Df_a soit inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un C^1 difféomorphisme de V sur W.

Applications :

* surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

[GOU]
I Fonctions de plusieurs variables
Problème 6.

* Théorème de Hadamard-Lévy :
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que :
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ Df_x est inversible
- $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ [DEV]
- $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

Th (Inversion globale)
Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 injective. Si Df_x est inversible pour tout $x \in U$, alors
$f : U \to f(U)$ est un C^1-difféomorphisme.

Th : (Fonctions implicites)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $(a,b) \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la différentielle de $x \mapsto f(a,x)$ en b est inversible. Alors il existe $V \in \mathcal{V}_a$ dans $\mathbb{R}^n$ et $W \in \mathcal{V}_b$ dans $\mathbb{R}^p$ tels que $V \times W \subset U$ et $Df_x(y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi : V \to W$ telle que
$(x \in V, y \in W \quad f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \quad \varphi(x) = y)$

Rq : φ est de classe C^1 sur V.

App : Théorème des extrémums liés.

III Différentielle d'ordre supérieur
Déf : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admet une différentielle seconde en $a \in U$ si $x \mapsto Df(x)$ est différentiable en a. On note $D^2 f_a$ cette différentielle.

Déf : Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable, la matrice de $D^2 f_a$ est appelée matrice hessienne de f en a.
Cette matrice est symétrique :
Th (Schwarz) : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ $1 \leq i,j \leq n$.

Rq : on définit de même les différentielles d'ordre supérieur par récurrence.

Déf : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^k ($k \geq 1$) si f admet des dérivées partielles de tout ordre $\leq k$ continues sur U.
f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

Rq : Les théorèmes d'inversion subsistent dans le cas C^k.

Th : (Taylor-Young) : Si f est k fois différentiable en $a \in U$:
$f(a+h) - f(a) - Df(a).h - \ldots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = o(\|h\|^k)$, $h \to 0$

Th : (Taylor reste intégral) Si f est C^{k+1} sur U et si $[a, a+h] \subset$
$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \ldots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} d$

App : Lemme de Morse [DEV]

IV Application à la recherche d'extremums
Th : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
① Si f admet en a un extremum local et si $Df(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$
② Si f admet un minimum local en a et si $D^2 f(a)$ existe alors $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive.
③ Si $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f admet en a un minimum local strict.

Références : I [GOU]

II [GOU] [ROU]

III, IV [ROU]

[ROU] Rouvière *Petit guide de calcul différentiel*

[GOU] Gourdon *Analyse*

Développements possibles (autres) :

- surjectivité de l'exponentielle
- extremums liés