215 — Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

$n, p, q \in \mathbb{N}^*$; $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ; $f : U \to \mathbb{R}^q$.

[L3, ch. 30 et 31]

I – Différentiabilité (ordre 1).

1) Applications différentiables.

1. **Définition**. f est différentiable (diff.) en $a \in U$ si $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \mid f(a+h) - f(a) - L(h) = o(\|h\|)$.
Si L existe, elle est unique, on l'appelle différentielle de f en a et on la note $Df(a)$ ou $D_a f$.

2. **Exemple**. – $n = q = 1$: diff. équivaut à dérivable ;
– f linéaire : $Df(a) = f$, $\forall a \in U$.

3. **Propriété**. a) différentiabilité en $a \Rightarrow$ continuité en a ;
b) la différentiation est linéaire ;
c) $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$;
d) $D(f^{-1})(f(a)) = Df(a)^{-1}$.

[OA, exple 1.12, p.7]

4. **Exemple**. – f application bilinéaire :
$Df(a,b).(h,k) = f(a,k) + f(h,b)$.
– $f : x \mapsto \|x\|^2$: $Df(x).h = 2\langle x, h\rangle$.

2) Dérivées directionnelles

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$; $f = (f_1, \dots, f_q)$.

[RDO3, 8.1.1.5° p.285]

5. **Définition**. f est dérivable en $a \in U$ selon $v \in \mathbb{R}^n$ si la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. On note $\partial_v f(a)$. La ième dérivée partielle de f en a est $\partial_{e_i} f(a)$, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

[RDO3, p.286]

6. **Proposition**. f diff. en a implique
$$\partial_v f(a) = Df(a).v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n ;$$
dans ce cas
$$Df(a).(h_1, \dots, h_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

7. **Contre-exemple**. $f : (x,y) \mapsto y$ si $x = 0$ et $\frac{y^2}{x}$ sinon.

[Rou, exple 3, p.43]

8. **Définition**. Si f est diff. en a,
$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le q}}$$
est la matrice jacobienne de f en a.

Exple : $q = 1$: $Jf(a) = \text{grad} f(a)$ et $Df(a).h = \langle \text{grad} f(a), h\rangle$.

9. **Remarque**. 3.c) devient $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))\, Jf(a)$.

10. **Définition**. – f est diff. sur U si f est diff. en tout $a \in U$, $Df : a \mapsto Df(a)$ est la différentielle de f sur U ;
– f est $\mathcal{C}^1$ si f est diff. sur U et si Df est continue.

3) Inégalité des accroissements finis.

[Rou, ch3, E38, p.115]

11. **Théorème**. Soit $[a,b] \subset U$. Si f est diff. sur U et si $\exists M > 0 \mid \|Df(x)\| \le M$, $\forall x \in [a,b]$,
alors $\|f(b) - f(a)\| \le M \|b - a\|$.

12. **Applications**. – f est $\mathcal{C}^1$ ssi elle admet dérivée partielle continue pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
– Si U connexe : $Df(x) \equiv 0$ $\forall x \in U$ implique f constante sur U.

II - Inversion locale et fonctions implicites

[Rou, ch.5]

13. Théorème. Si f est un homeomorphisme diff. en a : f^{-1} diff. en $\Leftrightarrow Df(a)$ inversible. [Gou3, VI.1, p.170]

14. Définition. f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (difféo.) de $\mathcal{U}$ sur V si f bijective, et si f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^1$.

15. Théorème (inversion locale). Si f est $\mathcal{C}^1$ et si $Df(a)$ est inversible, alors il existe 2 ouverts, $V \ni a$, $W \ni f(a)$ tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo. de V sur W $(= f(V))$.

16. Application (pertubation de l'identité) $n=q$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$ et f est $\mathcal{C}^1$. S'il existe $M>0$ tel que, pour tout $x \in$ $\|Df(x)\| \leq M$ alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{M}[$, l'application $f_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo. de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. [L3, ch3, II.3.1, p.114]

17. Théorème (fonctions implicites). $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(a,b) \in \mathcal{U}$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f(a,b)=0$ et $\det(D_y f(a,b)) \neq 0$, alors il existe : V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^p$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^q$, avec, $V \times W \subset \mathcal{U}$ et $D_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$; et une unique application $\varphi : V \to W$ telle que $(x,y) \in V\times W$ et $f(x,y)=0 \iff x \in V$ et $y = \varphi(x)$. De plus φ est $\mathcal{C}^1$.

18. Exemple. — Le cercle unité.

— Le folium de Descartes $x^3+y^3-3xy=0$ est paramétrable pour $(x,y) \neq (0,0)$. [E76, p.237]

— Le système d'équations $\{x^4+y^3+z^4+t^2=0 ;\ x^3+y^2+z^2+t=2 ;\ x+y+z+t=0\}$ est résoluble au voisinage de $(0,-1,1,0)$.

— L'équation de Burgers,
$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } u(x,0) = f(x)$$
$(a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1)$ admet une solution au voisinage de tout point $(x,0) \in \mathbb{R}^2$. [E85, p.257]

III - Différentiabilité d'ordre supérieur.

[L3, ch.32]

19. Définition. Si $k \geq 2$, on dit que f est k fois diff. en a (resp. sur $\mathcal{U}$) si f est $k-1$ fois diff. sur un voisinage ouvert de a (resp. sur $\mathcal{U}$) et si $D^{k-1}f$ est diff. en a (resp. sur $\mathcal{U}$). On note alors $D^k f(a) = D(D^{k-1}f)(a)$ (resp. $D^k f = D(D^{k-1}f)$).

20. Remarque. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)) \simeq \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$

21. Théorème (Schwarz). Si f est 2 fois diff. en a,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad 1 \leq i,j \leq n.$$
aussi [FGN4 p.16]

22. Contre-exemple (nécessité de 2 fois diff.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto \{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et 0 sinon$\}$ admet en $(0,0)$ des dérivées partielles différentes.

[Rou, ch.6, E114, p.354]

23. Théorème (Taylor, reste intégral). Soit $[a,a+h] \subset \mathcal{U}$. Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ alors

$$f(a+h)-f(a)-Df(a).h - \dots - \frac{1}{k!}D^k f(a).h^k = \int_0^1 \frac{1}{!}(1-t)^k D^{k+1} f(a+th).h^{k+1}\,dt ,$$

où $h^k = (h,\dots,h) \in (\mathbb{R}^n)^k$.

24. Théorème (Taylor-Young). Si f est n fois diff. en a,

$$f(a+h)-f(a)-Df(a).h-\dots-\frac{1}{k!}D^k f(a).h^k = o(\|h\|).$$

DÉVELOPPEMENT [L3, ch.34]

25. Théorème (Lemme de Morse). $q=1$, $\mathcal{U} \ni 0$, f est $\mathcal{C}^3$. Si $Df(0)=0$ et la forme quadratique $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p,n-p)$, alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféo $x \mapsto u=\varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel $\varphi(0)=0$ et

$$f(x)-f(0) = u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2 .$$

IV – Extremums locaux.

[Rou, ch.7, E121, p.384]

26. Théorème (conditions nécessaires).
f admet un extremum local en a : si f est diff. en a, alors $Df(a)=0$; si f est 2 fois diff. en a on a de plus, $D^2f(a).(h,h) \geq 0$. $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

27. Contre-exemple. $f : x \mapsto x^3$.

28. Théorème (condition suffisante). Si $Df(a)=0$ et si $D^2f(a)$ est définie positive alors f admet un minimum local strict en a.

29. Exemple (méthode des moindres carrés). Soient $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i=1,\dots,n$. La fonction

$$(\lambda,\mu) \mapsto \sum_{i=1}^n (\lambda x_i+\mu-y_i)^2$$

atteint un unique minimum.

DÉVELOPPEMENT [Gou, sec. 5.2 lem 2 p.317]

30. Théorème (extrema liés). $q=1$, f est $\mathcal{C}^1$. Soient $g_1,\dots,g_m$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \mid g_1(x)=\dots=g_m(x)=0\}.$$

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en a tel que $Dg_1(a),\dots,Dg_m(a)$ soient des formes linéaires indépendantes, alors $Dg_1,\dots,Dg_m$ et Df sont liées :

$$\exists (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a)+\dots+\lambda_m Dg_m(a).$$

[Gou, sec 5.2. E4 p.317]

31. Application (inégalité arithmético-géométrique).

$$(x_1 \times \dots \times x_k)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k}(x_1+\dots+x_k) , \forall (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

4 bis. Proposition. $q=1$, $\mathcal{U}$ convexe, f différentiable : f est convexe sur $\mathcal{U}$ ssi $f(y)-f(x) \geq Df(x)(y-x)$ $\forall x,y \in \mathcal{U}$.

24 bis. Application. $q=1$, $\mathcal{U}$ convexe, f deux fois diff. : f est convexe ssi $D^2f(x)$ forme quadratique positive $\forall x$.

27 bis. Proposition. $q=1$, $\mathcal{U}$ convexe, f diff. en a : $Df(a)=0 \Rightarrow f$ admet en a un minimum global.

[Rou ; E42 p.127 (4 bis)
E108 p.329 (24 bis)
E119 p.380 (27 bis)

RÉFÉRENCES

[L3] Mathématiques L3 Analyse, Pearson Education.

[OA] Objectif Agrégation, 2^e éd., H&K.

[RDO3] CMS 3 Topologie et éléments d'analyse, Masson.

[Rou] ... calcul différentiel ..., 3^e éd., Cassini.
[ROUVIÈRE]

[Gos3] CMS 3. Analyse fonctionnelle et calcul différentiel, PUF,
[GOSTIAUX]

[Gou] GOURDON, Analyse, 2^e éd., Ellipses.

BONUS

Divers : – holomorphie et différentiabilité ;
[Rou, ch. 2, E18 p. 66]

– cas particulier du lemme de Poincaré..
[Rou, ch. 6, E99 p. 303]

Applications IAF : – $Df = cte \Rightarrow f$ affine
[Gos3, 16.47 p. 333]

– k-lip. ssi Df bornée (par k)

– f diff. $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} Df(x) = \ell$ dans $\mathcal{L}(E,F)$

$\Rightarrow f$ diff. en a et $Df(a) = \ell$.
[RDO3, 8.1.4.3°, cor II, p. 291]

– $(Df_n)_n$ cvg. unif. sur $\mathcal{U}$ et $(f_n \cdot)$ cvg.
$\Rightarrow (f_n)$ cvg unif vers f dans $\mathcal{U}$ et
$Df = \lim Df_n$.
[L3, ch 31, II.4, p. 691]
aussi [Rou, ch. 3, E39 p. 117]

Formules de Taylor : – théorème de Borel ;
[Rou, ch. 6, E116, p. 359]

– TCL [Ouvrard, Probabilités 2, 14.22]

Extremums locaux : – emballage le plus économique ; [Rou, ch. 7, E128 p. 406]

– inégalité de Hadamard.
[Rou, ch. 7, E130 p. 409]

– $k \in E$ fixé : $Dg(a) \cdot \ell = D^2 f(a) \cdot (\ell \cdot k \quad \forall \ell \in E$
où $g : x \mapsto Df(x) \cdot k$. [RDO3, 8.2.2.3°, p. 310]

Développement: Lemme de Morse

Référence : Rouvière, exercice 114p354 et 66p209

Lemme 1 (***Lemme de Morse***)

Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique associée à la matrice hessienne en 0, $D^2f(0)$, est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et, en posant $u = \varphi(x)$:

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

On a d'abord besoin de la proposition suivante :

Proposition 1

On note E l'espace des matrices réelles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$ inversible. Soit $\varphi : E \to S$ l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^tMA_0M$$

Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans S, et une application $A \mapsto= \psi(A) = M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que,

$$A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

pour tout $a \in V$.

Démonstration : L'application φ est polynomiale donc de classe C^1 sur E. Pour $H \in E$, on a en munissant E et S d'une norme d'application linéaire :

$$\begin{aligned}\varphi(I+h) - \varphi(I) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= {}^t(A_0)H + (A_0H) + \bigcirc(\|H\|^2)\end{aligned}$$

Par suite,

$$D\varphi(I)H = {}^t(A_0H) + A_0H$$

Le noyau de l'application linéaire $D\varphi(I) : E \to S$ est donc formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétriques. Le noyau $D\varphi(I)$ a même dimension que l'espace des matrices antisymétriques de taille n, c'est à dire $n(n-1)/2$, la dimension de son image est donc $dim(E) - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 = dim(S)$. Donc $D\varphi(I)$ est surjective.
Toute matrice étant de manière unique somme d'une symétrique et d'une antisymétrique, le sous-espace F de E formé des matrices M telles que $A_0M \in S$ est un supplémentaire du noyau de

$D\varphi(I)$ dans E, de plus I appartient à F.
Soit $\Phi : F \to S$ la restriction de φ à F. La différentielle $D\Phi(I)$ restriction à F de $D\varphi(I)$ est bijective puisque $Ker(D\varphi(I) \cap F = \{0\}$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que Φ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $V = \Phi(U)$. Ainsi, V est un voisinage ouvert $A_0 = \Phi(I) = \varphi(I)$ dans S, et pour tout $A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M \in U$ telle que

$$A = {}^tMA_0M$$

et $M = \phi^{-1}(A) = \psi(A)$ est fonction continument différentiable de A. ∎

Le résultat obtenu est que toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, c'est à dire se ramène à celle-ci par changement de base.
On est maintenant en mesure de démontrer le lemme de Morse.

Démonstration : La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un s'écrit au voisinage de 0

$$f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$$

fonction C^1 de x. D'après la proposition précédente, il existe une matrice inversible $M(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$$

d'où

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y \text{ avec } y = M(x)x$$

Or, $Q(0) = (1/2)D^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et il existe donc une changement linéaire de coordonnées $y = Au$, où A est une matrice inversible, tel que

$${}^tyQ(0)y = {}^tu{}^tAQ(0)Au = u_1^2 + ... + u_p^2 - up + 1^2 - ... - u_n^2$$

ce qui donne à f l'expression voulue.
Enfin, l'application $x \mapsto u = A^{-1}M(x)$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1}M(0)$ matrice inversible. D'après le théorème d'inversion locale, c'est un difféomorphisme de classe C^1 entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. ∎

Théorème des extremas liés

Gourdon, *Analyse*, pages 311-314-321

Théorème :
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ et $f, g_1, g_2, \dots, g_p \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On pose

$$A = \{x \in U \ / \ g_1(x) = \ldots = g_p(x) = 0\}$$

Si $f_{|A}$ admet un extremum relatif en $a \in A$ et si les formes linéaires $dg_{1_a}, \dots, dg_{p_a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$df_a = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k dg_{k_a}$$

Notons tout d'abord que $p \leq n$. En effet, les p formes linéaires $dg_{1_a}, \dots, dg_{p_a}$ sont linéairement indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^n$. Mais l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^*$ est de dimension n. Ainsi, on obtient bien $p \leq n$.

1er cas : $p = n$.
Le théorème est alors évident. En effet, les n formes linéaires $dg_{1_a}, \dots, dg_{n_a}$ étant linéairement indépendantes, elles constituent une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Bref, comme $df_a \in (\mathbb{R}^n)^*$, il existe bien des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $df_a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k dg_{k_a}$.

Remarque : A ce stade, le cas particulier $n = 1$ a été entièrement traité (car alors on a a fortiori $p = n = 1$). On pourra donc supposer à présent $n \geq 2$.

2ème cas : $1 \leq p \leq n-1$.
Identifions alors $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p$. Ainsi, on notera $a = (a_s, a_p)$. De plus, tout élément de $\mathbb{R}^n$ sera écrit $(x, y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_p)$.
Les formes linéaires $(dg_{i_a})_{i=1\dots p}$ étant linéairement indépendantes, elles constituent une famille de rang p dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Ainsi, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_s}(a) & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

est de rang p. De A, on peut extraire une matrice de $GL_p(\mathbb{R})$. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{R})$$

En d'autres termes, $\det \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{i,j=1\dots p} \neq 0$.

Définissons alors $g : \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ z & \mapsto & (g_1(z), \dots, g_p(z)) \end{array}$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc un voisinage ouvert O de a_s, un voisinage ouvert V de (a_s, a_p) et une application $\psi \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R}^p)$ tel que pour tout $(x, y) \in V$ avec $x \in O, g(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \psi(x)$.

Finalement, il existe un voisinage ouvert W de a inclus dans V et un voisinage ouvert Ω de a_s inclus dans O tels que

$$(1) \qquad A \cap W = \{(x, \psi(x)) \ / \ x \in \Omega\}$$

Par ailleurs, $a_s \in O$ et $(a_s, a_p) \in V$. De plus, $g(a_s, a_p) = 0$. AInsi donc

$$(2) \qquad a_p = \psi(a_s)$$

Définissons alors $h : \begin{array}{ccc} O & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, \psi(x)) \end{array}$. Notons que $h \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})$.

La restriction de f à A admettant un extremum local en $a \in A \cap W$, on déduit de (1) et (2) que h admet un extremum local en a_s. Ceci implique alors que pour tout $i = 1 \dots s$, $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a_s) = 0$. Bref, par définition de h, il vient que

$$(3) \qquad \forall i = 1 \dots s, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_i}(a) \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(a) = 0$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \Omega$, $g(x, \psi(x)) = 0$. Ainsi,

$$(4) \qquad \forall k = 1 \dots p, \forall i = 1 \dots s, \quad \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(a) = 0$$

Introduisons alors la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_p}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1,n}(\mathbb{R})$$

Les relations (3) et (4) prouvent que les s premières colonnes de B s'expriment linéairement en fonction des p dernières. Bref, le rang de B est inférieur ou égal à p.

Ainsi, les $p+1$ lignes de la matrice B sont liées. Il existe donc des réels non tous nuls $\beta_1, \dots, \beta_{p+1}$ tels que

$$(5) \qquad \beta_1 dg_{1_a} + \ldots + \beta_p dg_{p_a} + \beta_{p+1} df_a = 0$$

Comme la famille $(dg_{1_a}, \dots, dg_{p_a})$ est libre, on a nécessairement $\beta_{p+1} \neq 0$.

Pour tout $i = 1 \dots p$, posons alors $\alpha_i = -\dfrac{\beta_i}{\beta_{p+1}}$. Dans ce cas, l'égalité (5) conduit exactement à $df_a = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i dg_{i_a}$.

Application : Pour tous réels $x_1, \dots x_n$ positifs, on a l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\boxed{(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}}$$

Définissons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1 \dots x_n \end{array}$.

Soit $s > 0$. Considérons l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1 + \ldots + x_n - s \end{array}$.

Posons alors $K_s = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n \ / \ g = 0\}$. De plus, soit U l'ouvert $(\mathbb{R}^+)^n$ et A l'ensemble $\{x \in U \ / \ g(x) = 0\} \subset K_s$.

L'ensemble K_s, fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est un espace compact. Par ailleurs, l'application f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et a fortiori sur K_s.

Ainsi, f possède un maximum sur K_s, maximum atteint par exemple en $a \in K_s$. Montrons donc que $a \in A$, afin d'appliquer le théorème des extréma liés.

- Sur $K_s \backslash A$, f est identiquement nulle. De plus, $f(a) \geq f\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) > 0$. Le point a est donc nécessairement dans A. Dans ce cas, si $a = (a_1, \dots, a_n)$, pour tout $i = 1 \dots n$, $a_i \neq 0$.

  Ainsi donc, $f_{|A}$ admet un maximum en a.

  Or f et g sont de classe C^1 sur U. D'après le théorème précédent, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $df_a = \alpha dg_a$.

  Bref, pour tout $i = 1 \dots n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Le calcul des dérivées partielles montre alorsque

$$(6) \qquad \forall i = 1 \dots n, \ \frac{f(a)}{a_i} = \alpha$$

  Mais $f(a) > 0$, ainsi $f(a) \neq 0$ et donc $\alpha \neq 0$. Bref, de (6), on déduit que les $(a_i)_{i=1\dots n}$ sont tous égaux à la constante $C = \dfrac{f(a)}{\alpha}$.

  Mais $a \in A$, ce qui donne $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - s = 0$, soit encore $nC - s = 0$.

  Finalement, sur K_s, f atteint son maximum en $\left(\dfrac{s}{n}, \dots, \dfrac{s}{n}\right)$. En d'autres termes,

$$(7) \qquad \forall x \in K_s, \ f(x) \leq f\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) = \left(\frac{s}{n}\right)^n$$

- Soit alors $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

  En appliquant l'inégalité (7) à $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > 0$ et $x \in K_s$, il vient ainsi $(f(x))^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

  La définition de f donne finalement $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

  Cette inégalité restant valable sur $(\mathbb{R}^+)^n$, l'inégalité arithmético-géométrique est finalement démontrée.