Leçon 215 : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

$n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert, $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

I) Applications différentiables

1) Premières définitions

[L3 p 677 et sq]

Déf 1 : f est différentiable (diff) en $a \in U$ si $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tel que $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$

Prop 2 : Si L existe, elle est unique.
On l'appelle différentielle de f en a, notée $Df(a)$ ou $d_a f$

Rq 3 : $n = q = 1$: diff $\Leftrightarrow$ dérivable

Ex 4 : si f linéaire, $Df(a) = f$ $\forall a \in U$.

Prop 5 :
- f diff. en $a \Rightarrow f$ continue en a.
- la différentiation est linéaire
- $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$
- $D(f^{-1})(f(a)) = Df(a)$.

EX 6 : les applications multilinéaires sont différentiables. Cas bilinéaire :
$$Df(a,b)(h,k) = f(a,k) + f(h,b).$$

[Rouvière p 59]

Ex 7 : $U = GL_n(\mathbb{R})$ $\quad f(X) = X^{-1}$
f est diff en tout point de U et $Df(X)(H) = -X^{-1} H X^{-1}$

Ex 8 $N : x \mapsto \|x\|_2^2$ est différentiable et
$$dN(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$$

2) Dérivées directionnelles

[OA p 4]

Déf 9 f dérivable en $a \in U$ selon $h \in E$ si $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. On note sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \partial_v f(a)$.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$, on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

[OA p 4]

Prop 10 f diff en $a \Rightarrow$ les dérivées directionnelles en a existent, et on a $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Df(a)(h)$.

Rq 11 la réciproque est fausse

c-ex : $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = y^2/x \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0,y) = y \end{array}\right\}$ en $(0,0)$

[L3 p 684]

Déf 12 Si f diff en a, le jacobien de f en a :
$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$$
c'est la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques

Déf 13
- f diff sur U si f diff pour tout $a \in U$. $Df : a \mapsto Df(a)$ est sa différentielle
- Si f diff sur U et Df continue, alors $f \in C^1$

3) Inégalité des accroissements finis

[L3 p 687]

Thm 14 $[a,b] \subset U$
Si f diff sur U et $\exists M > 0$ tel que $\|Df(x)\| \le M$ $\forall x \in [a,b]$
alors $\|f(b) - f(a)\| \le M\|b-a\|$.

Appl 15
- $Df(x) = 0$ sur $U \Rightarrow f$ constante sur les composantes connexes de U.
- $f \in C^1$ ssi f admet des dérivées partielles continues $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour tout i.

II) Inversion locale, fonctions implicites

1) Inversion locale

Déf 16 f est un C^1-difféomorphisme de U sur V si f bijective et f et f^{-1} sont C^1

Thm 17 (inversion locale) :
si $f \in C^1$ et $Df(a)$ inversible,
alors il existe 2 ouverts V et W tels que $a \in V$, $f(a) \in W$ et $f_{|V}$ soit un C^1 difféomorphisme de V dans W $(= f(V))$.

Appl 18 (perturbation de l'identité) $p = q$
$U \in \mathbb{R}^p$, $f \in C^1$.
S'il existe M tel que $\forall x$ $\|Df(x)\| \leq M$
alors $\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{M}[$, $f_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^p} + \varepsilon f$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Appl 19 (submersion) $f \in C^1$. Si $Df(a)$ injective alors à difféomorphisme à l'arrivée près, f est l'injection canonique $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p < q)$
De même $Df(a)$ surjective, f est la projection $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto (x_1, \dots, x_q)$

2) Fonctions implicites

Thm 20 (fonctions implicites) $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$, $(a,b) \in U$
$f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1.
Si $f(a,b) = 0$ et $\det(D_y f(a,b)) \neq 0$, alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^q$ ouverts $a \in V$, $b \in W$, $V \times W \subset U$ $D_y f(x,y)$ inversible $\forall (x,y) \in V \times W$
et il existe une unique application $\varphi : V \to W$ telle que
$(x,y) \in V \times W$ et $f(x,y) = 0 \iff x \in V$ et $y = \varphi(x)$
De plus, φ est C^1.

Ex 21 - Le cercle unité est paramétrable ds $\mathbb{R}^2$.
- Le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ est paramétrable pour $(x,y) \neq (0,0)$
- le système $\begin{cases} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 = 0 \\ x^3 + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ est résoluble au voisinage de $(0,-1,1,0)$
- dans $Gl_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage V de Id_n tel que si G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$ et $G \subset V$, alors $G = \{Id_n\}$

III) Dérivées d'ordre supérieur

1) Définitions et premières propriétés

Déf 22: f est 1 fois diff. ssi elle est diff. On note $d_a^1 f = d_a f$.
Si $k \geq 2$, f est k fois diff. ssi elle est $k-1$ fois diff. en tout point d'un voisinage ouvert V de a et d^{k-1} est diff. en a.
On note alors $d_a^k f = d_a(d^{k-1} f)$. En identifiant $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q))$ à $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) := \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{k \text{ fois}}, \mathbb{R}^q)$,
on peut considérer que $d_a^k f \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Déf 23: f est de classe C^k en a ssi $d^k f$ est k fois diff. sur un voisinage ouvert V de a et $d^k f : V_a \subset E \to \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est continue en a.

(Schwarz)
Thm 24: Si f est 2 fois diff., $d_a^2 f$ est une application bilinéaire symétrique.
Autrement dit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $1 \leq i, j \leq n$

Contre-Exemple 25: L'existence des dérivées partielles ne suffit pas :
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

LB p716 — 07Ap14 — L3 p714 — L3 p708 — L3 p717

[L2] p. 901-902

Déf 26 : Si $q=1$, si f est deux fois diff. en a, on appelle matrice hessienne de f en a la matrice Hf_a de $d^2_a f$ dans la base canonique.

Prop 27 : $Hf_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq p}$

2) Formules de Taylor

[ROU] p. 297, 299

Thm 28 : Si f est C^{n+1}, $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tels que $[a, a+h] \subset U$, alors

(Taylor, reste intégral) $f(a+h) - f(a) - d_a f(h) - \cdots - \frac{1}{n!} d^n_a f(h^n) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1}_{a+th} f(h^{n+1})\,dt$

où $h^n = (\underbrace{h, \ldots, h}_{n})$

Thm 29 : (Taylor-Young) Si f est n fois différentiable en $a \in U$,

$f(a+h) - f(a) - d_a f(h) - \cdots - \frac{1}{n!} d^n_a f(h^n) = o(\|h\|^n)$

[DA] p. 25

Appli 30 : (Lemme d'Hadamard)

Si $q=1$, f est C^∞ et $f(0)=0$, alors f appartient à l'idéal de $C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions coordonnées $\pi_i : x \mapsto x_i$

3) Lemme de Morse

[ROU] p. 334

([ROU] p. 330 pour $n=2$)

Thm 31 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant l'origine. Si $d_0 f = 0$ et $d^2_0 f$ est non dégénérée de signature $(r, p-r)$, il existe un difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^p$ tel que $\varphi(0)=0$ et, en posant $u = \varphi(x)$,

(DEV)

$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_r^2 - u_{r+1}^2 - \cdots - u_p^2$

IV) Extremums locaux ($q=1$)

1) Conditions nécessaires et suffisantes

[L2] p. 721-732

Prop 32 : Si f admet un extremum local en x_0 et f est diff. en x_0, alors $d_{x_0} f = 0$.

Prop 33 : Si f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 et f est 2 fois diff. en x_0 alors $d^2_{x_0} f$ est positive (resp. négative).

Contre-exemple 34 : Les réciproques sont fausses : $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{array}$ vérifie $d_0 f = 0$ et $d^2_0 f = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local

[DA] p. 471

Prop 35 : Si f est 2 fois diff. en x_0, $d_{x_0} f = 0$ et $d^2_{x_0} f$ est définie positive (resp. négative), x_0 est un minimum (resp. maximum) local strict.

2) Extremums liés

[GOU] p. 317

Thm 36 : Soient $f, g_1, \ldots, g_r : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On pose $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d_a g_1, \ldots, d_a g_r$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que

(DEV)

$d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \cdots + \lambda_r d_a g_r$

Contre-exemple 37 : $f(x,y) = x + y^2$ minimisée sous la contrainte $g(x,y) = x^3 - y^2 = 0$.

[ROU] p. ?

Appli 38 : (Diagonalisation des endomorphismes symétriques)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de u.

[L3] Analyse L3 - JP Marco - Pearson

[RO] Rouvière Petit guide de calcul diff. Cassini

[OA] Objectif Agrégation BMP. ed H&K

[MT] Mneimné Testard.

[GOU] Analyse, Gourdon

Lemme de Morse

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 354–355

Prérequis :
- loi d'inertie de Sylvester ;

Lemme 1
Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $V \in \mathcal{V}_{S_n(\mathbb{R})}(A_0)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\phi(A) A_0 \phi(A)$$

DÉMONSTRATION : On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto {}^tMA_0M \end{aligned}$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale [1]) et si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a (en munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|.\|$) :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + \|H\|\varepsilon(H) \text{ où } \varepsilon(H) \xrightarrow[H \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

De fait, on a $d\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$. Cette applications est clairement surjective car $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A = d\varphi(I_n)\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}A\right)$ et $\ker(d\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc si on pose $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$ on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi(I_n))$$

Si on note $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F on a $\ker(d\psi(I_n)) = \ker(d\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$ donc $d\psi(I_n)$ est bijective. Par théorème d'inversion locale on a alors l'existence d'un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_F(I_n)$ (que l'on peut, quitte à les intersecter, supposer inclus dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$) tel que ψ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre $\mathcal{U}$ et $V := \psi(\mathcal{U})$. De fait, V est un voisinage (ouvert) de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$$

D'où le résultat en posant $\phi := \psi^{-1}$.

Proposition 1 (Morse)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0.
Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On suppose que :
- *$df(0) = 0$;*
- *$d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$.*

Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

(i) $\varphi(0) = 0$;

(ii) pour x dans le premier des deux voisinages suscités, on a, en posant $u = \varphi(x)$:

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

1. Oui, je sais.

DÉMONSTRATION : Soit x au voisinage de 0. Alors, par formule de Taylor avec reste intégral, $f(x)-f(0) = {}^t x Q(x) x$, où $Q(x)$ est la matrice symétrique inversible (car $d^2 f(0)$ est non dégénérée) $\int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) dt$. Q définit alors une applications C^1 au voisinages de 0. Par le lemme 1, comme $Q(0) \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, il existe alors une matrice $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, avec $x \mapsto M(x)$ de classe C^1 au voisinage de l'origine, telle que :

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

Ainsi, si on pose $y := M(x)x$ on a :

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc par loi d'inertie de Sylvester il existe un changement de base $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que, si on pose $u := A^{-1} y$:

$$\begin{aligned} {}^t y Q(0) y &= {}^t u \, {}^t A Q(0) A u \\ &= u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 \end{aligned}$$

Enfin, comme $x \mapsto u := A^{-1} M(x) x$ a pour différentielle en l'origine $A^{-1} M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, il réalise par théorème d'inversion locale un C^1–difféomorphisme entre deux voisinages de l'unité, d'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- Rappelons l'hilarante formule de Taylor avec reste intégral : si f est de classe C^{k+1} sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ alors pour tous $a, h \in \mathcal{U}$ tels que $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ on a [2] :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(a)(h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition).* Cassini, 2009.

2. Comme il est d'usage dans le monde enchanté du calcul différentiel, on note $(h)^i$ le i–uplet (de vecteurs) $\underbrace{(h, \ldots, h)}_{i \text{ fois}}$.

Théorème des extrema liés

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :
- [Gou08], p. 317 et 327

Proposition 1 (Extrema liés)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Soient $g_1, \ldots, g_r \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On considère l'ensemble suivant :

$$\Gamma := \{x \in \mathcal{U} \,|\, \forall i \in [r],\, g_i(x) = 0\}$$

On suppose que :
- *$f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$;*
- *la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

DÉMONSTRATION : On pose $s := n - r$ et on identifie $\mathbb{R}^n$ au produit cartésien $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On utilisera de fait la notation $(x, y) = (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$ pour les éléments de $\mathbb{R}^n$. Posons également $(\alpha, \beta) := a$ (via l'identification précitée). On rappelle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\, \forall i \in [r],\, dg_i(a)(h) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g_i}{x_j}(a)h + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_i}{y_j}(a)h$$

Comme la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre, on a donc :

$$\mathrm{rg}\,(M) = r, \text{ où } M := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$$

Comme le rang de M est la taille de sa plus petite matrice sous-matrice carrée inversible, on peut supposer, quitte à renuméroter les variables[1] que :

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{i,j \in [r]} \neq 0$$

Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \ldots, g_r)$ par :

$$D_y g(a) \text{ est inversible}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à g au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$, obtenant de facto l'existence de deux voisinages ouverts $\mathcal{U}' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^s}(\alpha)$ et $\Omega \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^r}(\beta)$ et d'une application $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^r$ de classe C^1 telle que :

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ x \in \mathcal{U}' \\ y \in \Omega \end{cases} \Leftrightarrow y = \varphi(x) \qquad (1)$$

1. Un peu de foi que diable !

En d'autres termes, les éléments de $\Gamma \cap (\mathcal{U}' \times \Omega)$ sont de la forme $(x, \varphi(x))$. En particulier, on a nécessairement $\beta = \varphi(\alpha)$. Posons à présent :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{U}' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Comme $h(\alpha) = f(a)$ et que $\forall x \in \mathcal{U}'$, $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a). De fait :

$$\begin{aligned} \forall i \in [s],\ 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \psi)(\alpha) \text{ où } \psi := (\psi_1, \ldots, \psi_n) : x \mapsto (x, \varphi(x)) \text{ (i.e } \psi = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^s}, \varphi)) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha) \end{aligned}$$

En remarquant que $\forall j \in [s]$, $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$, que $\forall j \in [r]$, $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ et que $a = \psi(\alpha)$ on obtient :

$$\forall i \in [s], \quad \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \tag{2}$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur $\mathcal{U}'$ donc pour tout $k \in [n]$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$, ergo (par un calcul similaire) :

$$\forall i \in [s], \quad 0 = \frac{\partial g_k \circ \psi}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) = 0 \tag{3}$$

On se donne la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1,n}(\mathbb{R})$$

D'après les relation (2) et (3) les s premières colonnes de A sont combinaisons linéaires de ses r dernières, ergo $\mathrm{rg}(A) \leq r$. Comme $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$, on en déduit que les $r+1$ premières lignes de A sont liées, i.e qu'il existe $\mu_0, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\mu_0 df(a) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i dg_i(a) = 0$$

Or $(dg_i(a))_{i \in [r]}$ est libre donc $\mu_0 \neq 0$ (car sinon tous les μ_i devraient l'être). On obtient alors le résultat en posant $\lambda_0 := 1$ et $\forall i \in [r]$, $\lambda_i := -\frac{\mu_i}{\mu_0}$.

Détails supplémentaires :

- Comme la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$, il y a unicité des multiplicateurs de Lagrange.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition)*. Ellipses, 2008.