215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et Applications.

E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, U un ouvert de E, F un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

I) Différentiabilité

1) Définitions, premières propriétés

Déf: $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$.
L'application L est appelée différentielle de f en a et notée $df(a)$.

Rq: Pour $E=F=\mathbb{R}$, différentiable $\iff$ dérivable.

Prop: * $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est différentiable en a alors λf est différentiable en a et $d(\lambda f)(a) = \lambda\, df(a)$.
* $f, g : U \to F$, $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a alors $f+g$ est différentiable en a et $d(f+g)(a) = df(a)$.
* $f : U \to F$, $a \in U$, $g : U' \to G$ avec G $\mathbb{R}$-ev de dim finie et U' ouvert de F tq $f(U) \subset U'$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.
* f différentiable en $a \Rightarrow f$ continue en a.

Prop/Déf: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, il existe un unique vecteur noté $\mathrm{grad} f(a)$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df(a).h = (\mathrm{grad} f(a), h)$.

2) Dérivées partielles

Déf: $f : U \to F$ est dérivable en $a \in U$ selon $h \in E$ si $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0 ; sa dérivée est appelée dérivée directionnelle en a selon h et notée $\partial_h f(a)$.

Si h est un vecteur de la base canonique de E, la dérivée directionnelle est appelée dérivée partielle selon e_i et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Prop: Si f est différentiable en a alors les dérivées directionnelles existent dans toutes les directions et on a $\partial_h f(a) = df(a).h$.

Rq: La réciproque est fausse : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $0 \mapsto 0$.

$\partial_{(0,1)} f(0) = \partial_{(1,0)} f(0) = 0$, mais $\partial_{(1,1)} f(0) = \frac{1}{2} \neq \partial_{(0,1)} f(0) + \partial_{(1,0)} f(0)$.

Déf: Soit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^q$ différentiable en a. La matrice jacobienne de f en a est la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le n}}$ (matrice de $df(a)$ dans la base canonique.

3) Inégalité des accroissements finis

Th: Soit $[a;b] \subset U$. Si f est différentiable sur U et $\exists M > 0$ tel que $\|df(x)\| \le M \ \forall x \in [a,b]$ alors $\|f(b) - f(a)\| \le M\|b-a\|$

App: $f : U \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable en tt pt de U et $x \mapsto df(x)$ est continue de U ds $\mathcal{L}(E,F)$.

Contre-ex: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et 0 en 0 ; dérivable partout, dérivée pas continue en 0.

Th: $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en tt point de U et ces dérivées partielles sont continues.

II) Inversion locale, fonctions implicites

1) Inversion locale

Déf: Soit V un ouvert de F. $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^1$.

Ex: $\begin{matrix}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{matrix}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Prop: Soit $f : U \to V$ bijective différentiable en tout point de U :
f $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\iff \forall a \in U$, $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$

Th (Inversion locale) : Soit $f : U \to E$ $\mathcal{C}^1$, soit $a \in U$ tel que $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$.
Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tel que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V dans W.

Application : Surjectivité de l'exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.
[DEV]

Th (Chgt de coordonnées) : $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$. Les relations $u_i = f_i(x_1, \dots x_n)$ définissent un chgt de coordonnées au voisinage de a si le jacobien $Jf(a)$ est inversible.

Th (Inversion globale) : Soit $f : U \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est injective sur U et $\forall x \in U$, $Jf(x)$ est inversible, alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans $f(U)$.

Th (Hadamard-Lévy) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$. On a équivalence entre :
* f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
* f est propre (l'image de tout compact est compacte) et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Jf(x)$ est inversible.

2) Fonctions implicites

Th (fonctions implicites) : Soit U' un ouvert de $E \times F$, (a,b) un pt de U', $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application $\mathcal{C}^1$ de U dans $F^?$ telle que $f(a,b) = 0$ et $J_y f(a,b)$ la matrice jacobienne formée des dérivées partielles selon y est inversible.
Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^?$ avec $V \times W \subset U'$ et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$, unique, telle que
$x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0 \iff x \in V$ et $y = \varphi(x)$.

(cf Annexe).
φ est appelée fonction implicite définie par f au voisinage de (a,b).

Déf : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}$. V est lisse en a de dim d si $\exists F$ difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur $F(U)$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui transforme V en sev de dim d, i.e. $F(V \cap U) = V' \cap F(U)$, $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
V est une sous-variété de dim d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse en chacun de ses points.

Déf : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$. $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent en a à V si $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle ouvert contenant 0 telle que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Th : Si V est lisse en a de dim d, ses vecteurs tangents en a forment un sev de dim d appelé espace vectoriel tangent en a à V.

Th (sous-variétés) : Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :
(i) V est lisse en a de dim d.
(ii) $\exists U'$ vois. ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et $n-d$ fct° $f_i : U' \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq : $x \in V \cap U' \iff (x \in U'$ et $f_1(x_1, \dots x_n) = \dots = f_{n-d}(x_1 \dots x_n) = 0)$ et $df_1(a), \dots, df_{n-d}(a)$ sont indépendantes.
(iii) $\exists U'$ vois. ouvert de a, U'' vois. ouvert de $(a_1, \dots, a_d)$ ds $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fct° $g_i : U'' \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $x \in V \cap U' \iff \begin{cases} (x_1, \dots x_d) \in U'' \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots x_d) \\ \dots \\ x_n = g_{n-d}(x_1, \dots x_d) \end{cases}$
(iv) $\exists U$ vois. ouvert de a ds $\mathbb{R}^n$, Ω vois. ouvert de 0 ds $\mathbb{R}^d$ et n fct° $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ telles que $\varphi : u = (u_1, \dots u_d) \mapsto (\varphi_1(u), \dots \varphi_n(u))$

soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$ avec $a = \varphi(0)$ et telle que $d\varphi(0)$ soit injective.

III) Différentielles d'ordre supérieur

On définit les dérivées partielles en un pt a des composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ lorsqu'elles existent : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(a)$.

On dit que f est 2 fois différentiable en a si $x \mapsto Df(x)$ est différentiable en a. On note $D^2 f(a) = D(Df)(a)$ la différentielle seconde.

<u>Déf</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 fois différentiable. On appelle matrice hessienne de f la matrice $D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

<u>Th (Schwarz)</u>. $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiables. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

<u>Rq</u> : La hessienne est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

<u>Rq</u> : On définit les différentielles d'ordre supérieur par récurrence. $\forall k \geq 1$, $D^k f(a)$ est une application de $(\mathbb{R}^n)^k$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Déf</u> : f est de classe $\mathcal{C}^k$ si f admet des dérivées partielles continues à tout ordre $\leq k$. f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Formules de Taylor

<u>Th (Taylor-Young)</u> : Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a $f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a).(h)^k + o(\|h\|^k)$ en 0 dans $\mathbb{R}^n$.

<u>Th (Taylor reste intégral)</u> : Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U et $[a ; a+h] \subset U$, on a $f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$

<u>App</u> : Lemme de Morse [DEV].

IV) Problèmes d'extrema

<u>But</u> : Pour $C \subset E$, $f : E \to \mathbb{R}$, chercher $\inf\{f(x), x \in C\}$

<u>Prop</u> (Condition nécessaire de minimalité) : si $f : C \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $x^* \in C$ et est différentiable en x^* alors $df(x^*) = 0$.

<u>Ex</u> : $x \mapsto x^3$: $f'(0) = 0$ mais $0 \neq$ minimum local.

<u>Prop</u> : (condition de minimalité locale du second ordre). C un ouvert de E, $x^* \in E$, $f : C \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en x^*. Si $df(x^*) = 0$ alors :

- x^* min. local de $f \Rightarrow d^2 f(x^*)$ pos.
- $d^2 f(x^*)$ déf. pos $\Rightarrow x^*$ min local strict de f.

<u>Ex</u> : $x \mapsto x^4$: 0 min strict de f mais $f''(0) = 0$, pas de positivité stricte.

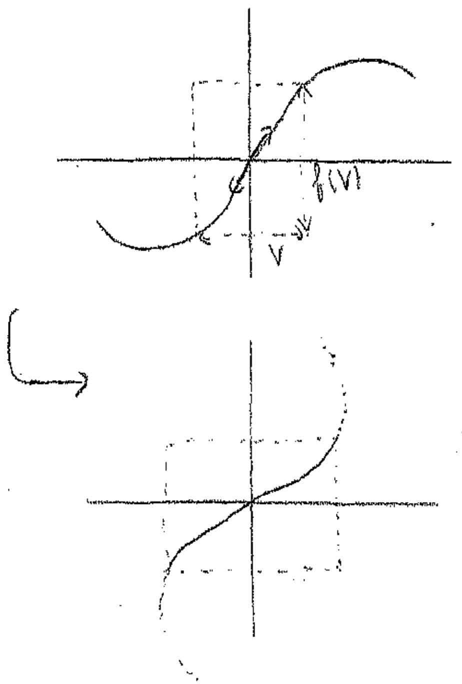
<u>Th (Extrema Liés)</u> : Soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, on pose $\Gamma = \{x \in U / \forall i \in [1..r], g_i(x) = 0\}$.

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est une famille libre alors $\exists \lambda_1 \dots \lambda_r$ tels que $df(a) = \sum \lambda_i dg_i(a)$.

<u>Appli</u> : diagonalisation des endomorphismes symétriques.

Inversion locale :

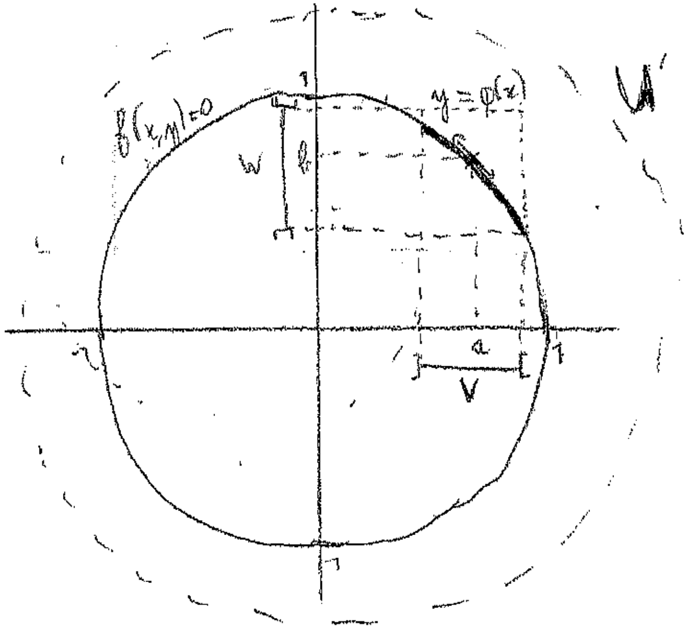
$x \mapsto \sin x$ au vois. de 0



Eq° implicites

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$



Réf :

[ROU] ROUVIERE, petit guide de calcul différentiel
[GOU] GOURDON, Analyse
[O.A] BECK.MALICK.PEYRE, Objectif Agrégation

Lemme de Morse

Théorème : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.

On suppose que $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe deux voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to W$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, tel que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in V$, si on note $\varphi(x) = (u_1, \dots, u_n)$:

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

On commence par montrer le lemme suivant.

Lemme : Soit S l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n.

Soit $A_0 \in S$, inversible.

Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application Ψ de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $Gl_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall A \in V$, $A = {}^t\Psi(A) A_0 \Psi(A)$.

Preuve : On considère l'application suivante :

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S$$
$$M \mapsto {}^tM A_0 M$$

φ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$.

En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée, on a pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H$$
$$= {}^t(A_0H) + A_0H + \|H\|\varepsilon(H)$$
où $\varepsilon(H) \xrightarrow[H\to 0]{} 0$

On a donc
$$D\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H.$$

Cette application est clairement surjective, car:
$\forall A \in S,\ A = D\varphi(I_n)(\frac{1}{2}A_0^{-1}A)$.
De plus, $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H$ est antisymétrique$\}$.
Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus \{M \mid M$ antisymétrique$\}$.
On pose $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S\}$
On a donc:
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n))$$

Si l'on note ψ la restriction de φ à F,
on a $\mathrm{Ker}(D\psi(I_n)) = \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) \cap F$
$$= \{0\}$$
donc $D\psi(I_n)$ est bijective.

Ainsi, par théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n, que l'on peut quitte à les intersecter supposer inclus dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$, tel que ψ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre U et $V := \psi(U)$.

V est un voisinage (ouvert) de $A_0 = \psi(I_n)$ dans S et: $\quad \forall A \in V,\ A = {}^t\psi^{-1}(A)\, A_0\, \psi^{-1}(A)$.

D'où le résultat en considérant $\phi = \psi^{-1}$.

Preuve du théorème:

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 s'écrit, au voisinage de 0,

$$f(x) - f(0) = Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x)\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x)\,dt$$

On identifie la forme quadratique (pour x proche de 0) $Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\,dt$ à la matrice symétrique associée, et x à un vecteur colonne, de sorte que $f(x) = f(0) + {}^t x\, Q(x)\, x$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, par théorème de dérivation sous le signe intégrale, Q est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de x.

On a $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$, donc par hypothèse $Q(0)$ est une matrice symétrique inversible.

D'après le lemme, il existe un voisinage V' de 0 et une application Ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $Q(V')$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ tels que:

$$Q(x) = {}^t(\Psi \circ Q(x))\, Q(0)\, (\Psi \circ Q(x)), \quad \forall x \in V'$$

On note $M = \Psi \circ Q$.

Comme $Q(0)$ a la même signature que $D^2 f(0)$, à savoir $(p, n-p)$, le théorème de réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ affirme qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n$,

$${}^t u\, {}^t P\, Q(0)\, P u = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

On obtient : $f(x)-f(0) = {}^t(P^{-1}M(x)x)\,{}^tPQ(0)P(P^{-1}M(x)x)$
$= u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$
avec $u = P^{-1}M(x)x$.

La fonction $\varphi : x \mapsto P^{-1}M(x)x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie $\varphi(0)=0$.

On souhaite montrer que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0.

Pour cela, on remarque que $D\varphi(0) = P^{-1}M(0)$.

En effet, $\varphi(h)-\varphi(0)-P^{-1}M(0)\,h =$
$P^{-1}(M(h)-M(0))\,h = o(h)$.

Ainsi, $D\varphi(0) \in GL_n(\mathbb{R})$.

On conclut par théorème d'inversion locale

$\square$

<u>Source :</u>

Rouvière, <u>Petit guide du calcul différentiel</u>

Surjectivité de l'exponentielle

<u>Lemme:</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ Alors $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

<u>Preuve:</u> On a $\exp(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(A)$,

avec $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{C}[X]$. Or, $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc de dimension finie, et donc en particulier fermé.
Donc $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$

<u>Proposition:</u> Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.
Cela implique la surjectivité de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$

<u>Preuve:</u> D'après le lemme, exp induit une application (que l'on notera exp) de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathbb{C}[A]^\times$.
C'est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^\times, \times)$.
Nous allons montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert fermé du connexe $\mathbb{C}[A]^\times$.

$\forall H \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(0+H) = \exp(0) + H + o(\|H\|)$, donc $D\exp(0) = I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.
Comme exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale.

Il existe donc un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et un voisinage ouvert V de $\exp(0) = I_n$ dans $\mathbb{C}[A]^\times$ tels que $\exp$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V.

- On montre que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. $I_n \in V$ donc $M \in MV$ et $MV \subseteq \exp(\mathbb{C}[A])$ (car exp est un morphisme). MV est l'image réciproque de V par l'application continue $N \in \mathbb{C}[A] \mapsto M^{-1}N$. MV est donc un ouvert, donc un voisinage ouvert de M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

- On montre que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Soit $M \in \mathbb{C}[A]^\times$. Si $M \in \exp(\mathbb{C}[A])^c$, alors $MV \subseteq \exp(\mathbb{C}[A])^c$.

On peut donc écrire :

$$\exp(\mathbb{C}[A])^c = \bigcup_{M \in \exp(\mathbb{C}[A])^c} MV$$

C'est une union d'ouverts, donc $\exp(\mathbb{C}[A])^c$ est ouvert, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

- On montre que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.

Soient $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$. Soit $P = \det(XM + (1-X)N)$, $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus Z(P)$. $Z(P)$ est fini, alors Ω est connexe par arcs, et contient 0 et 1, puisque $\det(M), \det(N) \neq 0$.

Soit donc $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin continu reliant 0 à 1 dans Ω.

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C}[A]^\times \\ t \mapsto \gamma(t) M + (1-\gamma(t)) N \end{cases}$$

est bien définie et réalise un chemin continu de M à N dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$, ce qui donne le résultat voulu.

$\square$

<u>Source</u>: Zavidovique, <u>Un max de maths</u>