215

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Exemples & applications.

Références : • Rouvière, Petit guide... • Gonnord-Tosel, calcul différentiel • Gourdon, analyse

Dans la suite, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$.
U est un ouvert de E et $a \in U$.

I) Propriétés de base sur la notion de différentiabilité d'une fonction

1) Applications différentiables

Def1 : Soit $f : U \to F$. f est différentiable en a si il existe une application linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tel que : $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$.
Dans ce cas, ℓ est unique. On la note df_a.
Si f est différentiable en tout point de U, f est dite différentiable sur U. $a \to df_a$ est appelée application différentielle de f. Si df est continue, on dit que f est de classe C^1.

Ex2 : • Si f est linéaire, $df = f$.
• Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ différentiable, alors $df_a . h = h f'(a)$
• $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$: $d(\det)_A . H = Tr({}^t Com(A) H)$
• $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$: $d(\exp)_0 . H = H$
• $f : A \to A^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$: $df_A . H = -A^{-1} H A^{-1}$

Pro3 : Somme, produit, composition :
• $d(f + \lambda g)_a = df_a + \lambda dg_a$
• Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ différentiables en a (resp. $g(a)$), alors $g \circ f$ différentiable en a et :
$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$
• Si $f : \mathbb{R}^m \to M_n(\mathbb{R})$ différentiable en a, fg aussi
$g : \mathbb{R}^m \to M_n(\mathbb{R})$ et $d(fg)_a = f(a) dg_a + g(a) df_a$

Ex4 : • Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ différentiable.
Alors $\varphi : t \to \|g(t)\|^2$ dérivable et $\varphi'(t) = 2\langle g(t), g'(t)\rangle$
• Si f est inversible et f^{-1} différentiable, $df^{-1}_{f(a)} = (df_a)^{-1}$. En particulier si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, alors $n = p$.
On dit que f est un difféomorphisme.

2) Dérivée directionnelle, dérivée partielle, et matrice jacobienne.

Def5 : Soit $v \in E$. f est dérivable en a selon v si $\varphi : t \to f(a+tv)$ est dérivable en 0. $f'_v(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

Ex6 : Si f différentiable, $f'_v(a) = df_a . v$.
⚠ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} f(x,y) = y^2/x \\ f(0,y) = y \end{cases}$ est dérivable en 0 selon tout vecteur mais n'est pas continue en 0.

Def7 : $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la quantité $f'_{e_i}(a)$. Si f est différentiable en a, et $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, $df_a . h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

Pro8 : Si $x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe et est continue en a, alors f est différentiable en a et $df_a . h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

Def9 : Soit $(e'_1, \dots, e'_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
$f = (f_1, \dots, f_p)$. Si f est différentiable en a, on a :
$Df_a . e_j = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e'_i$ d'où $Df_a . h = Jf_a . h$ avec $j \in \{1, \dots, p\}$
Jf_a la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. C'est la matrice jacobienne de f en a. Si f est C^1, $a \to Jf_a$ est continue.

Pro10 : Thm de changement de variables. Soit U et V ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et φ un C^1-difféomorphisme de U sur V. Alors : $\int_V f(v) dv = \int_U f(\varphi(u)) |\det(J\varphi_u)| du$
pour toute fonction continue f sur V.

Ex11 : $\int_{x^2+y^2 < a^2} f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta$
$\to \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$

Ex12 : $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, $df_a . h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ avec $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ c'est le gradient de f en a.
Géométriquement le gradient de f indique sa plus forte pente. Il est orthogonal aux courbes de niveaux de f passant par a (voir annexe).

Ex13 (Cauchy-Riemann) : Soit $U \subset \mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.
Alors f est holomorphe sur U si f est différentiable sur U et $\forall a \in U$, $df_a = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ (df_a est donc une similitude). Ainsi une fonction holo. preserve les angles.

3) Dérivées d'ordre supérieur

Def14 : Soit f une application différentiable. Si l'application $df : a \to df_a$ est différentiable en a, alors f est dite deux fois différentiable en a. On note $d^2 f_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$.

Rq15 : On a $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}_2(E, F)$. Donc $d^2 f_a$ définit une forme bilinéaire de E dans F. Par exemple, si $f : U \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en a, la forme bilinéaire associée est : $(h,k) \to \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) h_i k_j$
de matrice associée $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ C'est la hessienne de f en a.

Pro16 : Si $d^2 f_a$ existe, alors $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(a)$
(Thm de Schwarz)
On notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ cette quantité.

⚠ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0,0) = 0$
Alors $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

Def17 : On généralise en notant que f est de classe C^k pour $k \geq 1$ si ses dérivées partielles sont de classe C^{k-1}. f est de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \geq 1$.

Ex18 : $f : A \to A^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ est C^∞.
$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est C^∞

Pro19 (Taylor) : Soit f de classe C^k sur U. Alors
$f(a+h) = f(a) + df_a . h + \frac{1}{2} d^2 f_a . (h,h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f_a (h, \dots, h) + o(\|h\|^k)$

4) Inégalité des accroissements finis

Soit $f : U \to F$ différentiable soit $[a,b] \subset U$ un segment. On suppose que pour $x \in [a,b]$, on ait :

$\|df_x\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$ avec k une constante positive.

Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b-a\|$. En particulier, si U est convexe et $\|df_x\| \leq k$ $\forall x \in U$, alors f est k-lipschitzienne

<u>Pro 20</u> : Si U est connexe et si $df_x = 0$ $\forall x \in U$, alors f est constante sur U.

<u>Pro 21</u> : Soit f de classe C^1 sur un ouvert connexe U. Si $\forall x \in U$, $df_x \in O_n(\mathbb{R})$ alors f est une isométrie.

<u>Pro 22</u> : Soit $\gamma : [a,b] \to E$ arc paramétré. Pour σ une subdivision de $[a,b]$ par des points $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ on introduit $L_\sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$. On pose $L = \sup_\sigma L_\sigma$ où σ parcourt l'ensemble des subdivisions finies. Si γ est C^1, alors $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. <u>$L$ est la longueur de γ.</u>

<u>Ex 23</u> : Un cercle a pour périmètre 2π.

II) Théorèmes d'inversions et sous-variétés

1) Théorème d'inversion local (TIL)

<u>24)</u> Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose df_a inversible. Alors il existe un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W (voir annexe).

<u>Cor 25</u> : Si de plus f est injective et $\forall x \in U$, df_x est inversible alors f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$.

<u>Rq 26</u> : Il est difficile en général de montrer l'injectivité de f. On a un théorème plus général (Hadamard Levy)

<u>Pro 27</u> : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On a équivalence :

(1) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$

(2) f est propre, et df_x inversible pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

<u>Ex 27</u> : $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \to (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

est un difféomorphisme local en tout point mais non injective.

<u>Ex 29</u> : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective. Plus généralement :

- Une fonction holomorphe non constante est ouverte.
- $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

<u>Pro 30</u> (D'alembert-Gauss) Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynôme non constant. Alors P est surjectif. En particulier P a une racine.

<u>Pro 31</u> (Lemme de Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On suppose que $df_a = 0$ et d^2f_a est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Il existe alors un difféomorphisme C^1 φ entre deux voisinages de a tel que $\varphi(a) = a$, et en notant $(u_1(x), \dots, u_n(x)) = \varphi(x)$ on ait :

$f(x) - f(a) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Signalons quelques conséquences topologiques du Théorème d'inversion locale :

<u>Pro 32</u> (Théorème de la boule chevelue) Soit n impair ≥ 3 et $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ tq $\forall x \in S^{n-1}$, $\langle f(x), x \rangle = 0$, f continue. Il existe x tel que $f(x) = 0$ (on ne peut peigner une sphère poilue sans qu'elle ait d'épis.

<u>Pro 33</u> (Point fixe de Brouwer) Soit $n \geq 1$, et f continue de B^n dans B^n. Alors f admet un point fixe.

2) Théorème des fonctions implicites (TFI)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la différentielle de $y \mapsto f(a,y)$ en b est inversible (on la note $d_y f(a,b)$). Alors il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b tq que $V \times W \subset U$, $d_y f(v,w)$ est inversible pour $(v,w) \in V \times W$ et une unique application $\varphi : V \to W$ tel que $\begin{pmatrix} v \in V \\ w \in W \end{pmatrix}$ et $f(v,w) = 0$) $\Leftrightarrow$ ($v \in V$ et $w = \varphi(v)$)

(voir annexe en dessin).

De plus, φ est de classe C^1

<u>Rq 34</u> : En différentiant $f(x, \varphi(x)) = 0$ on trouve :

$d\varphi_x = -\left(d_y f_{(x,\varphi(x))}\right)^{-1} \circ d_x f_{(x,\varphi(x))}$

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Soit $(a,b) \neq (1,0)$ tel que $f(a,b) = 0$

$(x,y) \to x^2 + y^2 - 1$

Alors $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b \neq 0$. Du TFI, il existe un voisinage de (a,b) tel que $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. De plus, $\varphi'(x) = \frac{x}{y}$

<u>Rq</u> : Ce théorème est équivalent au théorème d'inversion local, via $g : (x,y) \to (x, f(x,y))$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans lui-même.

<u>Cor 35</u> : Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le TFI donne

$(P, x) \to P(x)$.

qu'une racine simple d'un polynôme P dépend localement de manière C^1 des coefficients de P.

<u>Ex 36</u> : Soit $k \geq 1$. Il existe un voisinage U de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ tel qu'on puisse définir une fonction C^1 "racine k-ième" de U dans $M_n(\mathbb{R})$ qui fixe I_n.

3) Sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit V un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$ et d un entier naturel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe un voisinage ouvert U de a et un C^1-difféo de U sur l'ouvert $F(U)$ contenant 0 qui transforme V en un sev de dimension d, i.e. $F(V \cap U) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$

(2) Il existe un voisinage ouvert U de a et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que $x \in V \cap U \Leftrightarrow x \in U$ et $f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0$, et les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)$ sont indépendantes.

(3) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert U' de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fonctions $g_i : U' \to \mathbb{R}$ C^1 telles que (après permutations éventuelles des coordonnées x_i) on ait :

$x \in V \cap U \iff \{(x_1,..,x_d) \in U'$ et
$x_{d+1} = g_1(x_1,..,x_d), \dots, x_n = g_{n-d}(x_1,..,x_d)$

(IV) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1 tel que φ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$, avec $a = \varphi(0)$, et que la différentielle de φ en 0 soit injective.

Si l'une des quatre conditions est vérifiée pour tout $a \in V$, on dit que V est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. L'entier d est unique.

Ex 37 : Le cercle : ss-variété de dimension 1.

$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2-1=0\}$ (2)

Localement, $y = \sqrt{1-x^2} = \varphi(x)$ sauf en $\pm(1,0)$ (3)

ou $x = \sqrt{1-y^2} = \psi(x)$ sauf en $\pm(0,1)$

$S^1 = \{(\cos(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}$ (4)

Pro 38 : $SO_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de dimension $n(n-1)/2$.

Plus généralement, tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$. (Cartan - Von Neumann).

Rq 39 : La sphère S^n, le tore, les ellipsoïdes sont des exemples de sous-variétés différentielles. Le graphe de $x \to |x|$ n'est pas une sous-variété différentielle, bien que homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Def 40 : (Espace tangent)(voir annexe)

Soit V une sous-variété différentielle, $a \in V$ et $v \in \mathbb{R}^n$. v est tangent en a à V s'il existe une fonction dérivable $\gamma :]-1,1[\to V$ tq $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=v$. L'ensemble des vecteurs tangents forment un sev de $\mathbb{R}^n$: T_aV de dimension d.

Pro 41 : Sous les notations du théorème des sous-variétés différentielles on a :

(1) $T_aV = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\, f_d$

(3) T_aV est le graphe de $g(a_1,\dots,a_d)$

(4) $\mathrm{Im}(d\varphi_0)$

Ex 42 : Soit $V = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

Soit $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in V$.

Alors $T_aV = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, et $\dim(T_aV)=2$.

Ex 43 : $T_{I_n}SO_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\} = A_n(\mathbb{R})$.

On a bien $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

III) Applications

1) Recherche d'extremums

Def 44 : Soit X un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, a un point de X et $f : X \to \mathbb{R}$. Le point a est un maximum global si $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in X$. C'est un maximum local s'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour $x \in V \cap X$. On a la définition de minimum global et local. Le terme extremum signifie maximum ou minimum.

Ex 45 : $x \to x^4 - x^2$ admet un maximum local en 0.

Pro 46 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

(1) Si f admet un extremum local en a, et si df_a existe alors $df_a = 0$ (pas suffisant).

(2) Si f admet un extremum local et d^2f_a existe, alors $d^2f_a \geq 0$ (La forme quadratique associée est positive)

(3) Si $df_a = 0$ et $d^2f_a > 0$ (définie positive) alors a est un minimum local. Si $d^2f_a < 0$, a est un maximum local (pas nécessaire).

Ex 47 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to x^3$ $f'(0) = f''(0) = 0$ Mais 0 n'est pas un extremum.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to x^4$ $f'(0) = f''(0) = 0$ et 0 extremum.

Rq 48 : Le lemme de Morse précise le comportement de f en a si d^2f_a est non dégénéré.

Pro 49 : (Extremas liés) Soient $f, g_1, \dots, g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Soit $a \in X$. Si a est un extremum local de $f_{|X}$ et si les différentielles $dg_{1a}, \dots, dg_{pa}$ sont indépendantes alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (multiplicateurs de Lagrange) tel que $df_a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_{ia}$ DEV 1

Ex 50 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x+y$, et $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Le maximum de f sur $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ est atteint en $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (voir annexe)

Ex 51 : Soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Alors $|\det(v_1,\dots,v_n)| \leq 1$ avec égalité ssi c'est une base orthogonale.

Ex 52 : Soit $(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \geq 0$ tq $\sum \alpha_i = 1$. Alors $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ avec égalité si $x_1 = \dots = x_n$.

2) Linéarisation d'équations différentielles

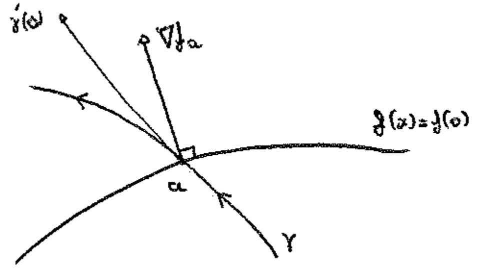
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f un champ de vecteur C^1 sur Ω. On note Φ_t le flot de f à l'instant t (sous réserve d'existence). On appelle équilibre pour f un point $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0)=0$. Ceci revient à dire que $\gamma \equiv x_0$ vérifie $\gamma' = f(\gamma(t))$ et $\gamma(0) = x_0$.

- L'équilibre x_0 est dit stable si pour tout voisinage V de x_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour $x \in U$, $\Phi_t(x)$ soit défini pour tout $t \geq 0$ et à valeur dans V.
- L'équilibre est instable s'il n'est pas stable.
- Il est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage V de x_0 dans Ω tq $\forall x \in V$, $\Phi_t(x)$ existe pour $t \geq 0$ et $\Phi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_0$. (voir annexe)

Pro 53 (Théorème de stabilité) Soit f de classe C^1, et x_0 équilibre. Si $\mathrm{Re}(Sp(df_{x_0})) \subset \mathbb{R}_-^*$ alors x_0 est asymptotiquement stable. Inversement, si λ est valeur propre de df_{x_0} et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, x_0 est instable. DEV 2

Ex 54 : Pour $f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ $(0,0)$ est stable.

(1) Gradient & géométrie



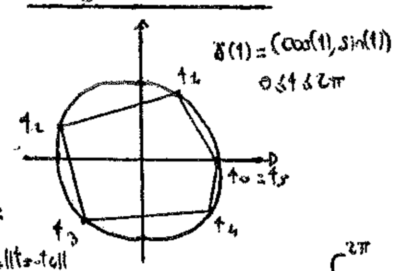
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma(0) = a$.

$(f\circ\gamma)'(0) = \nabla f_a \cdot \gamma'(0)$

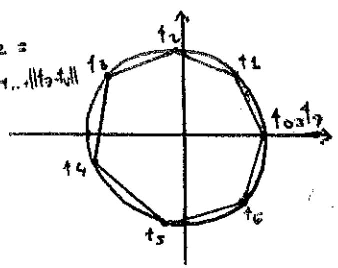
∇f_a est la direction de plus forte pente en a.

(2) Longueur d'un arc



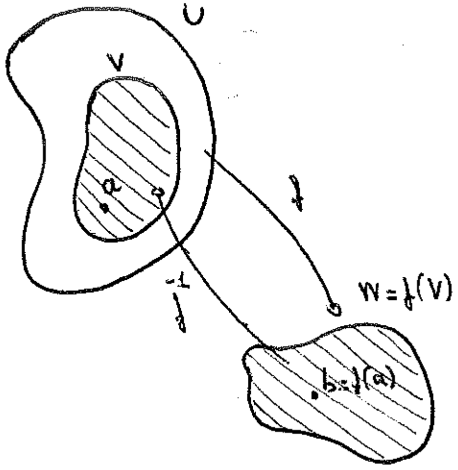
$L\sigma_1 =$
$\|t_1 - t_0\| + \dots + \|t_5 - t_4\|$

$\sup_\sigma L\sigma = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt$

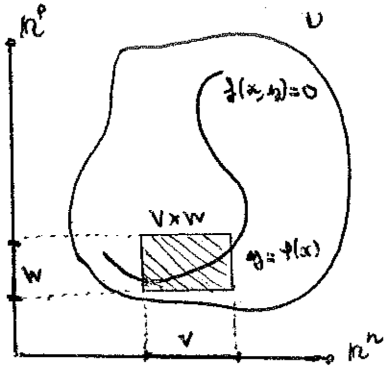


$L\sigma_2 =$
$\|t_1 - t_0\| + \dots + \|t_7 - t_6\|$

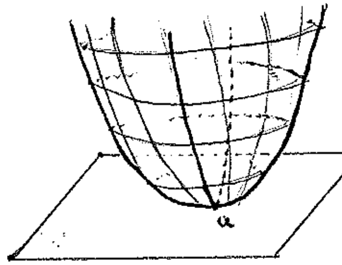
(3) Théorème d'inversion local



(4) Théorème des fonctions implicites



(5) Lemme de morse dans $\mathbb{R}^2$.

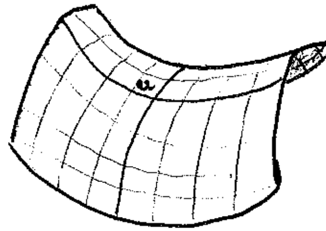


Cas 1 :

$\partial^2 f_a > 0$ (ou < 0)

$\partial^2 f_a \simeq \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a extremum local

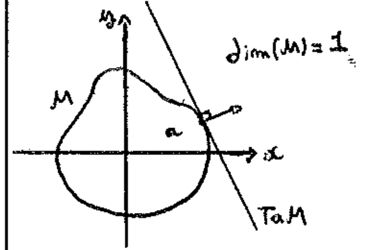


Cas 2 :

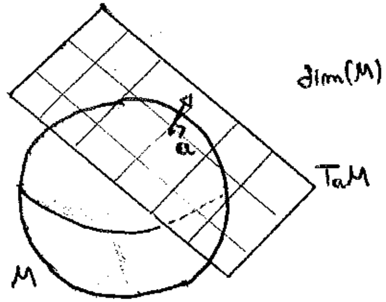
$\partial^2 f_a \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a est un point selle.

(6) Espace tangeant



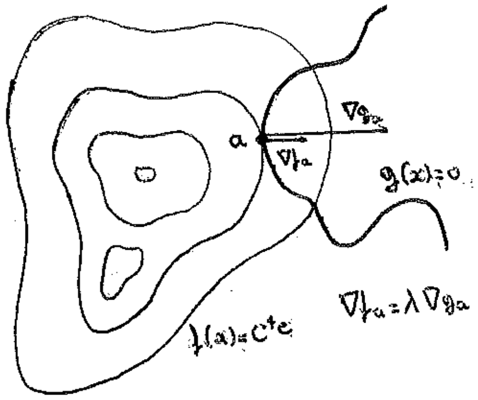
$\dim(M) = 1$



$\dim(M) = 2$

(7) Extremas liés

Courbes de niveau de f.

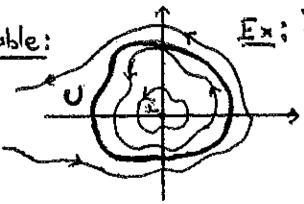


$\nabla f_a = \lambda \nabla g_a$

Si a est extremum, l'ensemble des zéros de g est "tangeant" à l'ensemble $\{x \mid f(x) = f(a)\}$ en a.

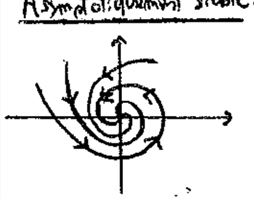
(8) Trajectoire stable d'une équation différentielle autonome

Stable :



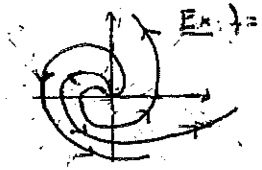
Ex : $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Asymptotiquement stable :



Ex : $f = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Instable :



Ex : $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème des extremas liés

Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g_1, ..., g_r : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\Gamma = \{x \in U \mid \forall i \in \{1, ..., r\}, g_i(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $D_a g_1, ..., D_a g_r$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$D_a f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i D_a g_i$$

Lemme 1. *Soient $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_r$ des formes linéaires. Alors*

$$\varphi \in Vect\{\varphi_1, ..., \varphi_r\} \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{r} Ker\varphi_i \subset Ker\varphi$$

Démonstration. Le sens direct direct est clair. Pour le sens indirect, on passe par la dualité :

$$Ker(\varphi)^\perp \subset \sum_{i=1}^{r} Ker(\varphi_i)^\perp$$

On constate alors que $Ker(\varphi_i)^\perp$ est la droite vectorielle $Vect\{\varphi_i\}$ (deux formes linéaires de même noyau sont colinéaires). Donc finalement :

$$Vect\{\varphi\} \subset \sum_{i=1}^{r} Vect\{\varphi_i\}$$

□

Démonstration. (théorème)
Par hypothèse, Γ est lisse en a. Soit $v \in T_a\Gamma$. Il existe alors une courbe $\gamma : I \to \Gamma$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On différentie $f \circ \gamma$ en 0 :

$$D_0(f \circ \gamma) = D_{\gamma(0)}(f)(\gamma'(0)) = D_a f(v)$$

$f|_\Gamma$ admet un extremum en a donc $f \circ \gamma$ en admet un en 0 donc $D_a f(v) = 0$. Ainsi $D_a f(v)$ est nulle sur $T_A\Gamma = \bigcap_{i=1}^{r} Ker D_a(g_i)$. On utilise alors le lemme pour conclure.

□

Corollaire 1. *Soit $(v_1, ..., v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$|\det(v_1, ..., v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i||$$

Démonstration. Nous allons maximiser det sur $S = \{(v_1, ..., v_n) \mid ||v_i||^2 = 1\}$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ un tel extremum. Il est clair que $(v_1, ..., v_n)$ doit être libre (sinon le déterminant est nul et il ne peut être un extremum vu qu'on a des familles 1 et -1).
Par les extremas liés, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \det(v_1, ..., v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i \langle v_i, h_i \rangle$$

On pose $\forall i, j,\ H_{i,j} = (h_1, ..., h_n) = (0, ..., 0, v_j, 0, ..., 0)$ avec v_j en i-ème position. En évaluant la formule précédente en $h_{i,i}$, on a

$$\det(v) = 2\lambda_i ||v_i||^2 = 2\lambda_i$$

donc $\lambda_i = \frac{\det(v)}{2}$. En évaluant maintenant en $h_{i,j}$ pour $i \neq j$:

$$0 = 2\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle$$

Comme $\lambda_i \neq 0$, on a que $(v_1, ..., v_n)$ est une base orthonormale.

Donc $\det(c) = \pm 1$, par conséquent le minimum de det sur S est -1 et son maximum est 1 donc pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs unitaires, on a

$$|\det(u_1, ..., u_n)| \leq 1$$

Pour une famille quelconque, si $\exists i$ tel que $u_i = 0$ on a automatiquement le résultat, sinon on a

$$|\det(\frac{u_1}{||u_1||}, ..., \frac{u_n}{||u_n||})| \leq 1$$

et on peut alors sortir les normes $||u_i||$ par n-linéarité du déterminant et on a le résultat.

□

Référence.

Théorème de Liapounov

Théorème. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
Si la matrice $D_0 f$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelles strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel, ie pour* x *voisin de* 0 *la solution* $y(t)$ *tend exponentiellment vers* 0 *lorsque* $t \to +\infty$.

Démonstration. On note $A = D_0 f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$. Par lemme des noyaux, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, on peut écrire $x = x_1 + ... + x_r$ avec $x_i \in E_i = Ker((A - \lambda_i Id)^{\alpha_i})$. Chaque E_i est stable par A donc $\forall t \geq 0$

$$e^{tA} x_i = e^{t\lambda_i} e^{t(A - \lambda_i Id)} x_i = e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i Id)^k \right) x_i$$

puis par inégalité triangulaire et majoration polynomiale (on prends la norme $||.||$ issue du produit sclaire de $\mathbb{R}^n$)

$$||e^{tA} x_i|| \leq e^{tRe(\lambda_i)} C_j (1 + |t|)^{\alpha_i - 1} ||x_i|| \leq C e^{tRe(\lambda_i)} (1 + |t|)^{n-1} ||x_i||$$

avec $C_i > 0$ et $C = \max_i(C_i) > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{C}^n$,

$$||e^{tA} x|| \leq \sum_{i=1}^{k} ||e^{tA} x_i|| \leq C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)} \right) \max_i(||x_i||)$$

On écrit la solution du système linéarisé $z(t) = e^{tA} x$. D'après les hypothèses, $\exists a > 0$, telque $\forall i$, $Re(\lambda_i) < -a$, donc

$$(1 + |t|)^{n-1} e^{tRe(\lambda_i)} e^{at} \longrightarrow 0$$

en particulier cette fonction de t est bornée, d'où la majoration montrant que 0 est un point d'équilibre attractif :

$$||z(t)|| \leq C' e^{-at} ||x|| \longrightarrow 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

On pose

$$b(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA} x, e^{tA} y \rangle dt$$

qui est une forme bilinéaire symétrique. On pose également $q(x) = b(x, x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ qui est définie positive par continuité de l'application $x \mapsto$

$||e^{tA}x||$ et théorème d'annulation d'une fonction positive sous le signe intégral. Remarquons de plus que b est bien définie par théorème de Cauchy-Scharz et par la propriété ci-haut :

$$\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle^2 \leq ||e^{tA}x||\ ||e^{tA}y|| \leq C'^2 e^{-2at}||x||\ ||y||$$

car $t \mapsto e^{-2at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On sait de plus que la différentielle de q en x au point h vaut $2b(x,h)$. En remarquant que

$$\left[\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle\right]' = 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle$$

on obtient de plus que

$$2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt = \left[\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle\right]_0^{+\infty} = -||x||^2$$

On admet l'zxistence d'une solution $y = y(t)$ au système différentiel. On note de plus $y' = f(y) = Ay + r(y)$. On va chercher à montrer qu'il existe deux constantes α, $\beta > 0$, tel que $y \leq \alpha$ implique que $q(y)' \leq -\beta q(y)$. On calcule :

$$q(y)' = Dq_y(y') = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = -||y||^2 + 2b(y, r(y))$$

Par définition de différentielle, $r(y) = f(y) - f(0) - Df_0(y) = o(y)$ donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(r(y)) \leq q(y)\varepsilon$$

et par suite $2b(y, r(y)) \leq 2\epsilon q(y)$.

De plus q et $||.||$ sont des normes équivalentes de $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel de dimension finie, donc $\exists C > 0$ tel que $Cq(y) \leq ||y||^2$, donc en posant $\beta = C - 2\epsilon > 0$ pour ϵ suffisamment petit, on obtient bien

$$q(y)' \leq -\beta q(y)$$

Supposons maintenant que $q(x) < \alpha$. On remarque que $\forall t \geq 0$, $q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un temps minimal t_0 tel que $q(y(t_0)) \geq \alpha$, donc $q(y(t_0)) = \alpha$ par continuité, on pourrait alors appliquer le résultat précédent, donc $q(y(t_0))' \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ et par conséquent $q(y(t))$ devrait être strictement plus grand que α pour t légèrement inférieur à t_0, ce qui contredirait sa minimalité.

On peut donc résoudre l'inéquation différentielle ci-dessus pour tout t positif, ce qui nous donne

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$$

donc $y(t)$ tends exponentiellements vers 0 pour x dans un voisinage de 0, ce qui achève la preuve.

□

Référence. "Petit guide de calcul différentiel". François Rouvière. Cassini. 2009.