215

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$ — EXEMPLES ET APPLICATIONS

I - Généralités sur la différentiabilité (ordre 1)

1) Applications différentiables

CADRE - Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés et U un ouvert de E.

DEF 1 - Une application $f: U \to F$ est dite différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire continue φ de E dans F telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0.$$

Si φ existe, elle est unique et s'appelle différentielle de f en a. Elle est notée df_a ou Df_a.

DEF 2 - Si $f: U \to F$ est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U et l'application

$$df: U \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,F), \quad a \longmapsto df_a$$

est appelée application différentielle de f.

DEF 3 - Si f est différentiable sur U et df continue sur U, f est dite de classe C^1.

EX 4 - Si $f: Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R})$, $A \longmapsto A^{-1}$, alors $df_A : Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$

REM 5 - En dimension quelconque, df_a dépend à priori des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ choisies sur E et F. Cependant, en dimension finie, les normes étant équivalentes, ce n'est pas le cas.

PROP 6 - Si $f: U \to F$ est linéaire continue, alors f est différentiable sur U et $\forall a \in U$, $df_a = f$.

PROP 7 - Une application $f: U \to F$ différentiable au point $a \in U$ est nécessairement continue en a.

PROP 8 - Soient f, g deux applications de U dans F, différentiables en $a \in U$. Alors :

1) $f+g$ est différentiable en a et $d(f+g)_a = df_a + dg_a$.
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf différentiable en a et $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$

PROP 9 (Règle composition). Soient E, F, G des $\mathbb{R}$evn, $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts et deux applications $f: U \to F$ et $g: V \to G$ vérifiant $f(U) \subset V$.
Si f est différentiable en a et g différentiable en f(a), alors $g \circ f: U \to G$ est différentiable en a et on a :

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

2) Dérivées partielles.

→ On suppose à partir de maintenant que $E = \mathbb{R}^n$.

DEF 10 - Soit $f: U \to F$, $a \in U$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application $t \mapsto f(a+te_i)$ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i, et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

PROP 11 - Si $f: U \to F$ est différentiable en un point a de U, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et on a par linéarité : $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

REM 12 - L'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité. Considérer par exemple :

$$(x_1, x_2) \longmapsto \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ et } (0,0) \text{ sinon.}$$

THM 13 - Une application $f: U \to F$ est C^1 sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles de tout ordre en tout point de U et que ces dérivées partielles sont continues sur U.

DEF 14 - Pour $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en un point a de U, on définit la matrice jacobienne de f au point a notée Jf_a comme $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

C'est la matrice représentative de df_a dans les base canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

PROP 15 - Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la PROP 9. Alors $g \circ f$ différentiable en a et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial g \circ f}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(a)$.

THM 16 - (Holomorphie). Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est $\mathbb{C}$-dérivable en a.
2) f est $\mathbb{C}$-différentiable en a.
3) f est $\mathbb{R}$-différentiable en a et $df_a^{\mathbb{R}}(i) = i\, df_a^{\mathbb{R}}(1)$.
4) $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont $\mathbb{R}$-différentiables en (a_1, a_2) et vérifient les équations de Cauchy-Riemann :
$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a_1,a_2) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a_1,a_2) \text{ et } \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(a_1,a_2) = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(a_1,a_2)$$

3) Inégalité de la moyenne.

THM 17 - Soit $f : U \to F$ différentiable sur U. Soit $[a,b]$ segment inclus dans U et $k \in \mathbb{R}^+$. Supposons pour tout $x \in [a,b]$, $\|df_x\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$. Alors on a l'inégalité de la moyenne :
$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b - a\|_E.$$

CORO 18 - Soit $f : U \to F$ différentiable sur U.

1) Si U est un ouvert convexe de E et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in U$, $\|df_x\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$, alors f est k-lipschitzienne sur U.
2) Si U est un ouvert connexe et pour tout $x \in U$, $df_x = 0$ alors f est constante sur U.

II - Théorèmes d'inversions et fonctions implicites

1) Inversion locale et globale.

THM 19. (Point fixe de Picard). Toute application contractante d'un espace métrique E dans lui-même possède un unique point fixe.

THM 20 - (inversion locale) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que df_a soit inversible. Alors il existe un voisinage V de a et un voisinage W de $f(a)$ tels que f restreinte à V soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur $W = f(V)$.

REM 21 - Si f est C^k, le difféomorphisme peut être choisi C^k.

EX 22 - L'application $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

LEMME 23 - Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage ouvert de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\varphi : V \to GL_n(\mathbb{R})$ tels que : $\forall A \in V$, $A = {}^t\varphi(A) A_0 \varphi(A)$.

THM 24 - admis. (inversion globale). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application injective de classe C^k telle que pour tout point a de U, df_a soit inversible. Alors f est un C^k difféomorphisme.

APP 25 - Changement en coordonnées polaires.
$U =]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.
et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty,0] \times \{0\}$ est un C^1 difféomorphisme.
$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

2) Fonctions implicites.

THM 26 - Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $(a,b) \in U$. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. Supposons $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles de f par rapport à y est inversible. Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de b avec $V \times W \subset U$ tels que :

1) $D_y f(a,b)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$.
2) il existe une unique application $\varphi : V \to W$ C^1 telle que :
$x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0 \iff x \in V$ et $y = \varphi(x)$.

EX 27 - (Folium de Descartes). Étude de la courbe d'équation :
$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

III - Différentielles d'ordre supérieur

1) Applications plusieurs fois différentiables

DEF 28 - Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U. Si $df \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^n)$ est différentiable en un point $a \in U$, f est dite deux fois différentiable en a et on note $d(df)_a = d^2 f_a$.

DEF 29 - $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est dite deux fois différentiable en $a \in U$ si chacune de ses composantes $f_i : U \to \mathbb{R}$ le sont.

DEF 30 - Sous réserve d'existence, on définit par récurrence sur k, une dérivée partielle d'ordre k par la relation :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right).$$

DEF 31 - Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en $a \in U$. On définit la matrice hessienne de f en a par : $D^2 f_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

THM 32 - (Schwarz). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur U et que celle-ci soient continues en $a \in U$. Alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

DEF 33 - Pour $k \geq 1$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^k sur U si ses dérivées partielles premières sont C^{k-1} sur U.

2) Formules de Taylor.

NOTATION - Pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ k fois différentiables, on note pour $h \in \mathbb{R}^n$, $d^k f_a(h)^k = d^k f_a(h, \dots, h) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k}$

THM 34 - (Taylor Young). Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est k fois différentiable en $a \in U$. On a : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f_a(h)^k + o(\|h\|^k)$ lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$.

THM 35 - (Taylor avec reste intégral) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^{k+1} sur U et si le segment $[a, a+h]$ est tout entier contenu dans U, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f_a(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f_{a+th}(h)^{k+1} \, dt$$

APP 36 (Lemme de Morse). **DEV 1**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $df_0 = 0$ et que la forme quadratique $d^2 f_0$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

3) Convexité et problème d'extrema.

PROP 37 - Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiables. On a équivalence entre :

1) f est convexe sur U.
2) $\forall (x, y) \in U^2$, $f(y) - f(x) \geq df_x(y - x)$.
3) La hessienne de f en tout point de U est positive.

PROP 38. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $a \in U$ et admet un extremum relatif en a, alors $df_a = 0$.

PROP 39 - Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $a \in U$. Si $d^2 f_a$ est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

THM 40 (Extrema liés) **DEV 2**

Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1a}, \dots, dg_{ra}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tq :

$$df_a = \lambda_1 dg_{1a} + \dots + \lambda_r dg_{ra}.$$