215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ex. et app.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.

I - Différentiabilité

a) Définitions et propriétés

Déf. 1 : soit $a \in \mathcal{U}$. On dit que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe une application linéaire continue $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

quand h tend vers 0. Cette application ℓ est unique, on l'appelle différentielle de f en a, et on la note $df(a)$.

Rem. 2 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, alors elle est dérivable en a et $df(a) : h \longmapsto f'(a) \times h$.

Ex. 3 : Si f est linéaire, alors $df(a) = f$ $\forall a \in \mathcal{U}$.
Si f est constante, $df(a)$ est l'application nulle $\forall a \in \mathcal{U}$.

Prop. 4 : Si $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont différentiables en a, et on a :

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a), \quad d(\lambda f)(a) = \lambda df(a).$$

Ex. 5 : Si f est affine, elle est différentiable en tout point $a \in \mathcal{U}$ et $df(a)$ est égale à la partie linéaire de f.

Prop. 6 : Soient $g : V \to \mathbb{R}^k$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $f(a) \in V$. Si f est différentiable en a, et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est diff. en a et on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

App. 7 : Si $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est bijective, diff. en $a \in \mathcal{U}$, et telle que f^{-1} est diff. en $f(a)$, alors $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme, et on a : $df(a)^{-1} = d(f^{-1})(f(a))$.

Ex. 8 : l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est différentiable en tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et sa différentielle en A est l'app. $H \longmapsto -A^{-1} H A^{-1}$.

Ex. 9 : l'app. déterminant est diff. en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on a : $d(\det)(A) : H \longmapsto \mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A)^t \cdot H)$, où $\mathrm{Com}(A)$ est la comatrice de A.

Prop. 10 : Si f est diff. en a, alors elle est continue en a.

Thm. 11 : (Inégalité des accroissements finis). On suppose f différentiable sur tout $\mathcal{U}$. Soit $[a,b]$ un segment contenu dans $\mathcal{U}$. S'il existe $M > 0$ tel que $|||df(x)||| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|.$$

Coro. 12 : Si $\mathcal{U}$ est convexe et si $|||df(a)||| \leq k$ $\forall a \in \mathcal{U}$, alors f est k-lipschitzienne sur $\mathcal{U}$: $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$ $\forall x, y \in \mathcal{U}$.

Coro. 13 : Si $\mathcal{U}$ est connexe et si $df(a) \equiv 0$ $\forall a \in \mathcal{U}$, f est constante sur $\mathcal{U}$.

b) Dérivées directionnelles

Déf. 14 : On dit que f est dérivable en $a \in \mathcal{U}$ selon $h \in \mathbb{R}^n$ si la fonction $t \longmapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Sa dérivée est alors appelée dérivée partielle de f dans la direction h, notée $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$. Si h est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on note $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, et on parle alors de i-ème dérivée partielle de f.

Ex. 13 : soit $f : (x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ y^2 \end{pmatrix}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)$ est l'app. qui à (h_1, h_2) associe $h_1 + 2bh_2$.

Prop. 14 : Si f est diff. en a, ses dérivées partielles en a selon toutes les directions existent. La réciproque est fausse.

Ex. 15 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ admet des dérivées partielles nulles en l'origine, mais n'est pas diff. en ce point.

Déf. 16: Si f est diff. en $a \in \mathcal{U}$, $df(a)$ est représentée par la matrice suivante dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$:

$$Jf(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

où f_i est la i-ème composante de f. Cette matrice est appelée matrice jacobienne de f en a.

Déf. 17: On munit $\mathbb{R}^n$ d'un pdt scalaire $\langle , \rangle$ et on suppose f diff. en $a \in \mathcal{U}$. Alors il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f en a, tel que :

$$df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \; \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Rem. 18: $\nabla f(a)$ indique la direction "de la plus forte pente" de f en a.

Déf. 19: f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est diff. sur $\mathcal{U}$ et si sa différentielle est continue. On dit que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est $\mathcal{C}^1$, bijective, d'inverse $\mathcal{C}^1$.

Thm. 20: f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de $\mathcal{U}$.

c) Différentielles d'ordres supérieurs.

Déf. 21: Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est diff. en tout point de $\mathcal{U}$, sa diff. df définit une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$.
Si cette application est diff. en $a \in \mathcal{U}$, on dit que f est 2 fois diff. en a, et on note $d^2 f(a) = d(df)(a)$. Les composantes $(\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)$ de $df(x)$ admettent alors des dérivées partielles en a, notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, et $d^2 f(a)$ est donnée par la matrice suivante, appelée hessienne de f en a :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

De même, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \,/\, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ est dite 2 fois diff en a si chacune de ses composantes $f_1, \dots, f_m$ l'est.

Thm. 22: (Schwarz) Si f est deux fois diff. en $a \in \mathcal{U}$, alors $d^2 f(a)$ est bilinéaire symétrique : $\forall 1 \leq i,j \leq n$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Rmq. 23: on peut ainsi définir une application de classe $\mathcal{C}^2$, puis, par récurrence, une application k-fois diff. et sa différentielle d'ordre k, et une application de classe $\mathcal{C}^k$, et un $\mathcal{C}^k$-difféo. On dira que f est $\mathcal{C}^\infty$ si elle est $\mathcal{C}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 24: $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Thm. 25: (Formule de Taylor-Young) Si f est k-fois diff. en $a \in \mathcal{U}$:

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(a)(h, \dots, h) + o(\|h\|^k)$$

lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$.

II - Applications

a) Théorème d'inversion locale

Thm. 26: (TiL) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$ et que $\det(df(a)) \neq 0$, c.à.d que $df(a)$ est inversible. Alors il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ contenant a et il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(a)$ tels que $f : W \to V$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféo.

Coro. 27: (Ti globale) $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ de classe $\mathcal{C}^k$ est un $\mathcal{C}^k$-difféo ssi f est injective et $df(a)$ est un isomorphisme $\forall a \in \mathcal{U}$.

App. 28: soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est "suffisamment proche" de I_n, alors A admet une racine k-ième : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, B^k = A$.

Thm. 29: (Changement de variable) Soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféo, et soit $V = \varphi(\mathcal{U})$. Alors V est mesurable et $f \in L^1(V)$ ssi on a $|\det(d\varphi)| f \circ \varphi \in L^1(\mathcal{U})$. Dans ce cas :

$$\int_V f(x)\, dx = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)|\, dy.$$

30: Calcul de lois en probabilités.

DÉV. 1 (Thm. d'Hadamard-Lévy) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféo. de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ ssi $df(x)$ est inversible $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

b) Théorème des fonctions implicites.

Thm. 31 : (TFI) Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a,b) \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice formée des dérivées partielles de f par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable, notée $d_y f(a,b)$, est inversible. Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport à y : il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et il existe $W \in \mathcal{V}(b)$ ouverts, avec $V \times W \subset \mathcal{U}$ et $d_y f(x,y)$ inversible $\forall x, y \in V \times W$; et il existe une unique application $\varphi : V \to W$ telle que :

$$x \in V,\ y \in W \text{ et } f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } y = \varphi(x).$$

De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Elle est appelée fonction implicite définie par f au voisinage de (a,b).

Rmq. 32 : $\varphi(a) = b$

Rmq. 33 : φ est diff. sur V, et on a $d\varphi(x) = -d_y f(x, \varphi(x))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$

App. 34 : Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors x_0 dépend localement de P_0 de façon $\mathcal{C}^\infty$.

III - Optimisation

a) Conditions de minimalité

Prop. 35. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si x^* est un minimum local de f et si f est diff. en x^*, alors $df(x^*) = 0$.

App. 36 : (Thm. de Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

App. 37 : (Thm. de Darboux) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalle $\neq \emptyset$, $f'(I)$ est un intervalle.

Prop. 38 : Si f est 2 fois diff. en $x^* \in \mathcal{U}$ et si $df(x^*) = 0$, alors :
- si x^* est un minimum local de f, $d^2f(x^*)$ est positive (forme quad.)
- si $d^2f(x^*)$ est définie positive, x^* est un min. local strict de f.

Ex. 39 : $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ remplit la $1^{\text{ère}}$ condition en $(0,0)$, mais pas la $2^{\text{è}}$, et $(0,0)$ n'est pas un min. local de f.
$g : (x,y) \mapsto x^2 + y^4$ admet un min. strict en $(0,0)$ mais $d^2 f(0,0)$ n'est pas définie positive.

App. 40 : (Principe du maximum) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$, on pose : $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Si $\Delta f(x) > 0$ $\forall x \in B(0,1)$, alors $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$ $\forall x \in B(0,1)$.

Prop. 41 : (Inégalité d'Euler) Soient $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si f admet un minimum local en $x^* \in \mathcal{C}$, et si $df(x^*)$ existe, alors :

$$df(x^*)(y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

b) Extrema liés

Thm. 42 : (Extrema liés) Soient $f ; g_1, \dots, g_R : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$. Soit $C = \{x \in \mathcal{U} \mid g_1(x) = \dots = g_R(x) = 0\}$. Si $f|_C$ admet un extremum local en a, et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_R(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_R) \in \mathbb{R}^R$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que : $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_R dg_R(a)$.

DÉV. 2 Le parallélépipède rectangle de surface minimale pour un volume donné (emballage le plus économique) est cubique.

App. 43 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Références : Objectif Agreg., Beck.

Petit guide de calcul diff., Rouvière.

Analyse, Gourdon

Autres dévs possibles : Lemme de Morse

Thm du point fixe de BROUWER

Rajouts possibles : Points fixes.

Méthode de Newton, du gradient.

Géométrie différentielle.

Formule de Taylor avec reste intégral.