I) Généralités sur les arcs de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

$\mathbb{R}^n$ est supposé muni de $<,>$, produit scalaire usuel.

Déf 1 On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^n$, de classe C^k, toute application $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ $C^{k \geq 0}$, I intervalle de $\mathbb{R}$.
La trajectoire de f est $\mathrm{Im} f$.

Déf 2 On appelle changement de paramétrage de classe C^k toute application $\varphi : J \to I$, J int de $\mathbb{R}$ / • φ C^k • φ bijective • φ^{-1} C^k sur I

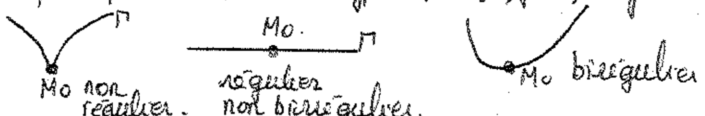
Déf 3 $f : I \to \mathbb{R}^n$ C^k. On appelle paramétrage admissible de classe C^k, de f, toute application $g : J \to \mathbb{R}^n$ / $\exists \varphi$, changement de paramétrage C^k de f, $g = f \circ \varphi$

Exemple 1. Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, $\underset{[0,2\pi]}{t} \mapsto (\cos t, \sin t)$;
$\underset{[0,\pi]}{t} \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ est un changt de paramétrage admissible (vitesse double)

Déf 4 $f : I \to \mathbb{R}^n$ C^k, $t_0 \in I$ • $f(t_0)$ est dit régulier si $f'(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
un point non régulier est dit singulier.
• $f(t_0)$ est dit birégulier si $(f'(t_0), f''(t_0))$ non liée.

Déf 5: un arc est dit régulier si tous ses points le sont.
De même pour la birégularité.

Exemple 2. (pour des arcs du type $t \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$ où f C^2



Propo 1: ($n=2$, étude des points singuliers) cf ANNEXE 1.

Rem 1: La régularité est préservée par changement de paramétrage admissible.

Déf 6 $f : I \to \mathbb{R}^n$ un arc. On appelle abscisse curviligne toute application $s : I \to \mathbb{R}$ C^1 / $s' = \|f'\|$.

Proposition 2: s est une abs curviligne $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$ / $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du$

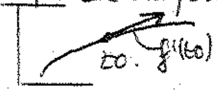
Rem 2. $s(t)$ correspond à la longueur de l'arc f entre t_0 et t.

Déf 7: $g : J \to \mathbb{R}^n$ est appelé changement de paramétrage normal de $f : I \to \mathbb{R}^n$ si $\forall u \in J$ $\|g'(u)\| = 1$
(Parcours à vitesse unitaire)

Prop 3 f arc, s une abscisse curviligne alors ① $f \circ s^{-1}$ est normal
② $f \circ s^{-1}$ est admissible.

Déf 8 $f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto M(t) \end{array}$ C^k et $t_0 \in I$. et $\Gamma = \mathrm{Im} f$, $\underset{\|}{A}$ $M(t_0)$
on dit que Γ admet une tangente en $M(t_0)$ si $\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|}(t)$ admet une limite quand $t \to t_0$.

Prop 4: En tout point régulier, la lim précédente est $\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$



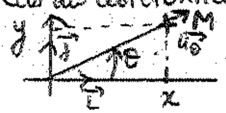
Déf 9: Si f est régulier, on définit le vecteur tangent unitaire en $t \in I$ par $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$.

Prop. 5 Si f est paramétré normalement par s : $\vec{T}(s) = f'(s)$

II) Arcs Paramétrés de $\mathbb{R}^2$ — Courbes Planes

Prop 6. $f : I \to \mathbb{R}^2$ $C^{k \geq 1}$. $t \mapsto (x(t), y(t))$ alors s vérifie $s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$. $\forall t \in I$.

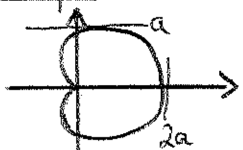
Cas des coordonnées polaires : $\theta \mapsto \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$



$s'(\theta)^2 = \rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2$

où $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$.

Exemple (Cardioïde) $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$



$s'(\theta) = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$\mathrm{Long}(\mathrm{card}) = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 8a$

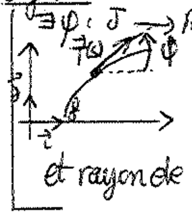
Prop 7 (Inégalité Isopérimétrique) **[DVT1]**

soit Γ une courbe { – régulière, – C^1, – fermée, – sans point multiple.

Alors : $4\pi A \leq L^2$ et le cercle réalise l'égalité.

Def 10 (Courbure) $f : J \to \mathbb{R}^2$ paramétrage normal $C^{k\geq 2}$

$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}$ C^{k-1} / $\forall s \in J$ $\vec{T}(s) = \cos\varphi(s)\,\vec{i} + \sin\varphi(s)\,\vec{j}$.



On appelle courbure au point s la quantité : $\gamma = \varphi'(s) = \frac{d\varphi}{ds}$.

et rayon de courbure $R = \frac{1}{\gamma}$

Rem 3 • on peut définir la courbure si le paramétrage est quelconque par : $\gamma = \varphi'(t)/s'(t)$.

•

Prop 8 (Calculs de la Courbure)

• Coordonnées Cartésiennes $\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$.

Cas d'une fonction : $(x, f(x))$ $\gamma = \frac{f''(x)}{(1+f'^2)^{3/2}}$.

• Coordonnées polaires $\theta \longmapsto \rho(\theta)\vec{u_\theta}$

$$\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}.$$

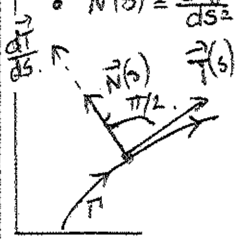
Rem 4 : Courbure (et donc rayon de courbure) sont préservés au signe près par changement de paramétrage admissible.

Prop/Déf 9 (Repère et formule de Frenet)

$f : J \to \mathbb{R}^2$ $C^{k\geq 2}$ paramétré par l'abs curviligne.

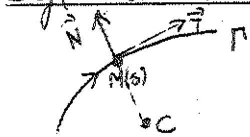
$\vec{T}(s) := \frac{df}{ds}$ et on appelle vecteur normal en s, le vecteur $\vec{N}(s) := \mathrm{Rot}_{\pi/2}(\vec{T}(s))$ (dans le sens direct)

• $\vec{N}(s) = \frac{d^2 f}{ds^2}$ • $\begin{pmatrix} d\vec{T}/ds(s) \\ d\vec{N}/ds(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \end{pmatrix}$



[formules de Frenet].

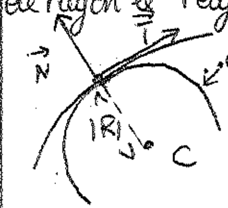
Déf (11 - Centre de Courbure) $f : J \to \mathbb{R}^2$ $C^{k\geq 2}$, $\Gamma = \mathrm{Im} f$.



on appelle centre de courbure en M de Γ le point $C \in \mathbb{R}^2$ / $\vec{MC} = R\,\vec{N}$. (Ici $R \leq 0$)

Prop 9 : le centre de courbure C en M à Γ est situé dans la concavité locale en M de Γ.

Déf. 12 (Cercle osculateur) on appelle cercle osculateur à Γ en M le cercle de centre le centre de courbure et de rayon le rayon de courbure en valeur absolue.



Rem : le cercle osculateur est tangent en M à $\vec{T}$ (car centré sur la normale en M).

Exemple Centre de Courbure d'une hyperbole équilatère [cf ANNEXE] **[DVT2]**

NOM :

Prénom :

Jury :

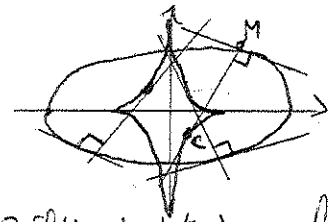
Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

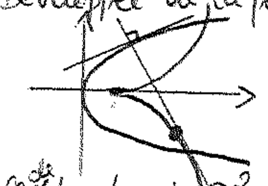
Autre sujet :

Déf 13 : on appelle développée de Γ la courbe des centres de courbure de Γ.

Exemple 2 : La développée d'une ellipse est une astroïde



Développée de la parabole



Déf 14 . Soit $(D_t)_t$ une famille de droites de $\mathbb{R}^2$. On appelle enveloppe de $(D_t)_t$ toute courbe admettant

- en chaque point, une tangente qui $\in D_t$.
- Inversement, toute droite D_t est une tangente

Prop 10 : notons $D_t : a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$.

si $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$, l'enveloppe existe

Prop 11 (Lien entre enveloppe est développée)

la développée d'une courbe est l'enveloppe de ses normales

III Arcs paramétrés de $\mathbb{R}^3$ - Courbes Gauches.

Extension des Notions : trajectoire, régularité, birégularité, tangentes, abscisse curviligne, sont définis par la présentation générale faite en I.

En coordonnées cartésiennes : $\Delta'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'^2(t) + z'^2(t)}$

Déf 15 (Courbure et Rayon de Courbure) on définit la courbure par : $\gamma = \left\| \frac{d\vec T}{ds} \right\|$, le rayon de courbure par : $R = \frac{1}{\gamma}$

Déf 16 (Repère de Frenet) on appelle repère de Frenet le trièdre direct $(\vec T, \vec N, \vec B)$ où $\begin{cases} \vec T \text{ est le vecteur tangent unitaire} \\ \vec N = R \, d\vec T / ds \end{cases}$

et $\vec B = \vec T \wedge \vec N$. $\vec N$ = le vecteur normal principal. $\vec B$ est le vecteur binormal.

Déf 17 - Torsion) on appelle torsion la quantité $\tau = \vec B \cdot \frac{d\vec N}{ds}$ et le rayon de torsion $T = \frac{1}{\tau}$.

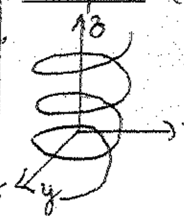
Prop 12 (Formules de Frenet)

$$\begin{pmatrix} d\vec T/ds \\ d\vec N/ds \\ d\vec B/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec T \\ \vec N \\ \vec B \end{pmatrix}$$

Déf 18 (Plan Osculateur) on appelle plan osculateur en M le plan passant par M, et orienté par (f', f'')

Rem 5 : C'est l'analogue du cercle osculateur pour les courbes gauches, c'est le plan qui "colle" le plus à la courbe.

Exemple 3 (hélice à pas constant)



$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \\ z(t) = ht \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}^{+*}, \ h \in \mathbb{R}^*.$$

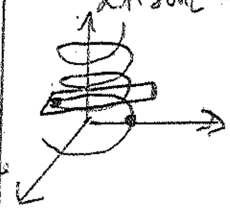
$R = \frac{r^2 + h^2}{r}$.

$T = \frac{r^2 + h^2}{h}$.

Exemple 4 (plan osculateur de l'ellipse à pas constant).

$x h \sin t - y h \cos t + r(\cos 2t + h(\cos t + \sin t)) = 0$

$-3r\cos 2t$.



NOM :

Prénom :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Jury :

Autre sujet :

4

NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi :

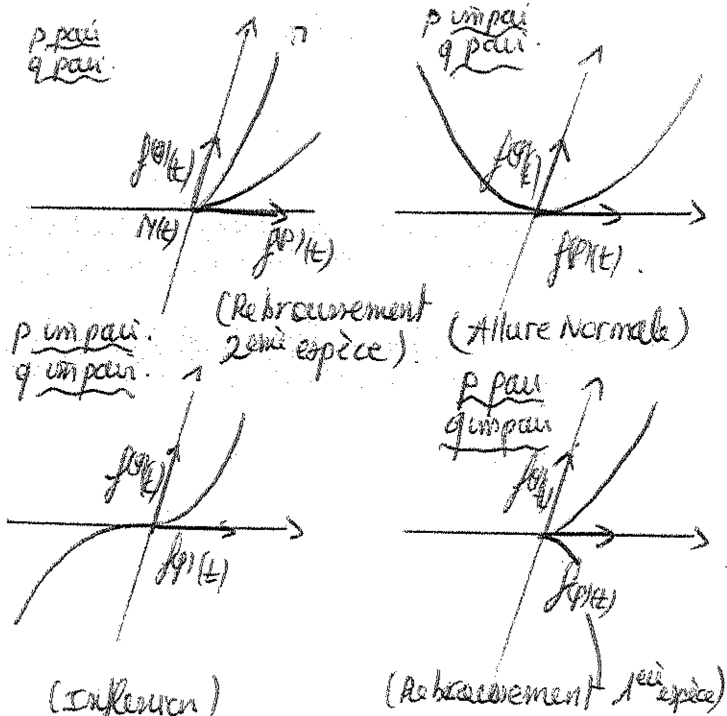
Autre sujet :

ANNEXE

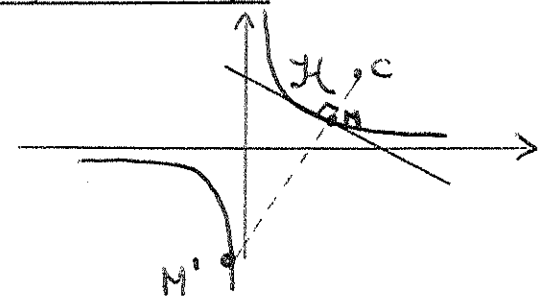
<u>Prop 1</u> (Etude des points singuliers)

$f : I \to \mathbb{R}^2$ $C^{k\geq 1}$. On note

$\begin{cases} p \text{ le plus petit entier} \geq 1 \ / \ f^{(p)}(t) \neq \vec{0} \\ q \text{ le plus petit entier} > p \ / \ (f^{(p)}(t), f^{(q)}(t)) \text{ libre.} \end{cases}$



<u>DVT 2 - Illustration.</u>



<u>Biblio</u> :

- GÉOMETRIE Cours Tome 7
  Jean-Marie Monier -
- ORAUX X-ENS, Analyse 4, Francinou & Gianella
  (pour les 2 développements)