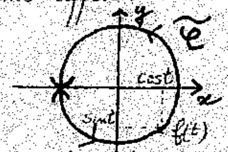
216 — Étude métrique des courbes. Exemples.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

I Courbes, tangentes et longueur.

1. Généralités sur les arcs paramétrés de $\mathbb{R}^n$. [JMM] & [BĀR]

<u>Def 1.</u> On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^{k\geq 0}$, tout couple (I, f) où I est un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$. Notation : $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.
La trajectoire de f est $\mathrm{Im}(f) = \{f(t), t \in I\}$.



<u>Ex 2.</u> Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ privé du point $(-1, 0)$
$f : t \in]-\pi, \pi[\longmapsto (\cos t, \sin t)$

<u>Def 3.</u> On appelle changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ de f toute application $\varphi : J \longrightarrow I$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifiant :
- φ est de classe $\mathcal{C}^{k\geq 1}$. • φ est bijective • φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k\geq 1}$.

<u>Def 4.</u> On appelle paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de f toute application $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, tel qu'il existe un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ φ de f tel que $g = f \circ \varphi$.

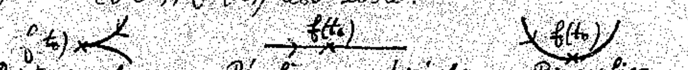
<u>Ex 5</u> $\tilde{g} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ est un paramétrage admissible de f, via $\varphi : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto 2\operatorname{Arctan}\theta \in]-\pi, \pi[$

<u>App 6.</u> Résolution de l'équation de Pythagore $u^2 + v^2 = w^2$ où $u, v, w \in \mathbb{Z}$.

<u>Rq 7.</u> La relation $(I, f) \sim (J, g)$ <u>ssi</u> il existe $\varphi : J \to I$ $\mathcal{C}^k$ difféo. tel que $g = f \circ \varphi$ (resp. avec $\varphi' > 0$) est une relation d'équivalence. On appelle **courbe** (resp. courbe orientée) une classe d'équivalence pour cette relation.

2. Étude locale en un point d'un arc paramétré. [JMM]

<u>Def 8.</u> * Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, et $t_0 \in I$. $f(t_0)$ est dit régulier si $f'(t_0) \neq 0$. Sinon, $f(t_0)$ est dit singulier.
* Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$. $f(t_0)$ est dit birégulier si la famille $(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre.



Point singulier — Régulier, non birégulier — Birégulier.

<u>Def 9.</u> Un arc est dit régulier (resp. birégulier) si tous ses points le sont.

<u>Rq 10.</u> Régularité et birégularité sont préservés par changement de paramétrage admissible. On peut donc, par exemple, évoquer la régularité d'une courbe.

<u>Prop 11.</u> Caractérisation des points singuliers de $\mathbb{R}^2$, cf **Fig 1**.

<u>Def 12.</u> $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto M(t) = f(t) \end{array}$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $t_0 \in I$, $\Gamma = \mathrm{Im} f$. On dit que Γ admet une tangente en $A = M(t_0)$ si $\frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}$ admet une limite lorsque $t \longrightarrow t_0$.

<u>Prop 13</u> Dans le cadre précédent, si l'un au moins des vecteurs $f'(t_0), \dots, f^{(k)}(t_0)$ est non-nul, alors Γ admet en $M(t_0)$ une tangente dirigée par le premier vecteur dérivé successif non-nul.

<u>Rq 14</u> (Cas particulier) Si (I, f) est régulier, le vecteur tangent unitaire en $t \in I$ est défini par $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$.

3. Longueur et abscisse curviligne.

<u>Def 15</u> [Longueur]. Soit $\gamma = ([a, b], f)$ un arc paramétré continu de $\mathbb{R}^n$. Notons S l'ensemble des subdivisions $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ de $[a, b]$.
Définissons $L_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|$
Si $\sup_{\sigma \in S} L_\sigma(\gamma) < +\infty$, alors γ est dit rectifiable de longueur $l(\gamma) = \sup_{\sigma \in S} L_\sigma(\gamma)$.
Sinon, l'arc est dit de longueur infinie. La quantité $l(\gamma)$ est indépendante du paramétrage choisi.

<u>Prop 16.</u> Soit $\gamma = ([a, b], f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, l'arc est rectifiable, et $l(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$. (indep. du paramétrage)

[JD] ou [ROU]

<u>Ex</u> * La longueur du cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ (parcouru une fois) est 2π.
* (ADMIS) La courbe de Von Koch (cf **fig 2**) n'est pas rectifiable [HAU]

<u>Prop 17.</u> La longueur d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour paramétrage $f : \theta \in [\theta_0, \theta_1] \longrightarrow \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$ (coordonnées polaires) vaut $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{\frac{1}{2}} \, d\theta$

<u>Ex 18</u> (Cardioïde) [JMM]

$\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$
Longueur $= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} \, d\theta = 8a$

<u>Def 19</u> [**Abscisse curviligne**] Soit Γ une courbe régulière, et $\gamma = ([a, b], f)$ un paramétrage admissible de Γ (dans $\mathbb{R}^n$). On appelle abscisse curviligne associée à f la fonction $s : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \int_a^t \|f'(u)\| \, du \end{array}$

<u>Rq 20.</u> $s(t)$ est la longueur de **la courbe** paramétrée par $f|_{[a,t]}$

<u>Prop 21.</u> * s est un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$.
* $F \overset{\text{def}}{=} f \circ s^{-1}$ est un paramétrage admissible normal de Γ, i.e. si $\sigma \in [0, l(\Gamma)]$, alors $\|F'(\sigma)\| = 1$ (parcours à vitesse constante)

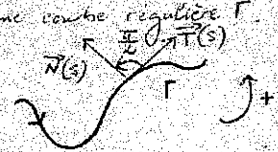
[DVP 1] [FGN]

Soit Γ une courbe de Jordan, de classe $\mathcal{C}^1$ et régulière. On note L la longueur de Γ et A l'aire qu'elle délimite. Alors, $4\pi A \leq L^2$ et le cercle (parcouru une fois) réalise l'égalité. (**Inégalité isopérimétrique**)

<u>Prop 22.</u> Si Γ est une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrée par s, alors $\overrightarrow{T}(s) = f'(s)$.

[JTM] **II. Etude des courbes planes** Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de l'orientation usuelle.

1. Repère de Frenet, courbure.



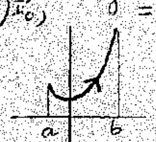
Def 23. Soit $c \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ un paramétrage par s d'une courbe régulière Γ.
Notons $\begin{cases} \vec{T}(s) = c'(s) \text{ le vecteur unitaire tangent} \\ \vec{N}(s) = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(s)) \text{ le vecteur normal tangent} \end{cases}$
$(\vec{T}(s), \vec{N}(s))$ est appelé repère (mobile) de Frenet.

Def 24. Soit $s \in I$, il existe $\gamma(s) \in \mathbb{R}$ tel que $T'(s) = \gamma(s) N(s)$
$\gamma(s)$: courbure algébrique de Γ en s.
$R(s) \overset{\text{def}}{=} 1/\gamma(s)$: rayon de courbure

Ex 25. • la courbure en tout point d'un segment est nulle
• le rayon de courbure d'un cercle (parcouru dans le sens direct) est son propre rayon.

Prop 26 (Calcul de la courbure) Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^2$ régulier, s le paramétrage par l'abscisse curviligne associé. Si $t \in I$, on a
$$\gamma(s(t)) = \frac{\det[f'(t), f''(t)]}{\|f'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{où } f(t) = (x(t), y(t))$$
Pour des coordonnées polaires $\theta \longmapsto \rho(\theta)\vec{u}_\theta$, $\gamma = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$

Ex 27. Arc de chaînette, paramétré par
$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (t, \mathrm{ch}\, t)$$



$$\forall t \in [a,b], \ \gamma(t) = 1/\mathrm{ch}^2 t$$

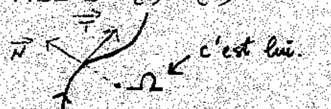
Rq 28. Courbure et rayon de courbure sont préservés au signe près par changement de paramétrage admissible.

Prop 29 [Formules de Frenet]
$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix}$$

2. Interprétation géométrique

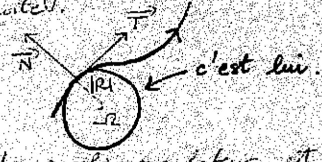
i/ Cercle osculateur

Def 30. Soit $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ paramétré par s. Notons $\Gamma := \mathrm{Im}(c)$, et $M = M(s) \in \Gamma$. On appelle centre de courbure de M en Γ le point $\Omega \in \mathbb{R}^2$ défini par $\overrightarrow{M\Omega} = R(s)\vec{N}(s)$.



Prop 31. Le centre de courbure Ω de M à Γ est situé dans la concavité locale de M en Γ (dans le cadre d'une courbe birégulière).

Def 32. On appelle cercle osculateur à Γ en M le cercle de centre Ω et de rayon $|R|$. Si $R = +\infty$, on assimile le cercle osculateur à une droite.

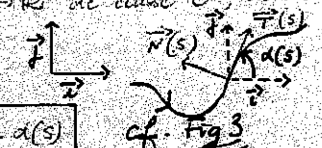


Rem 33. Le cercle osculateur est tangent à M en $\vec{T}$. C'est le cercle qui « colle le mieux » à la courbe (en un certain sens).

ii/ Variation de l'angle de la tangente. [Rou] & [BÄR]

Lemme 34. Si $g : I \to \mathbb{C}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall t \in I, |g(t)| = 1$, alors il existe $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que
$$\forall t \in I, \ g(t) = e^{i\alpha(t)}. \text{ (Théorème de relèvement)}$$

Proposition 35. Soit $c \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ un paramétrage par s d'une courbe régulière Γ. Il existe $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, de sorte que
$$\forall s \in I, \begin{cases} \vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{i} + \sin(\alpha(s))\vec{j} \\ \vec{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\vec{i} + \cos(\alpha(s))\vec{j} \end{cases}$$



et, par ailleurs, $\boxed{\gamma(s) = \frac{d}{ds}\alpha(s)}$ cf. Fig 3 [ZQ]

Corollaire 36. Si $K : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{p \geq 0}$, il existe une unique courbe orientée dont K soit la courbure.

Ex 37. * Si $K \equiv 0$, la courbe associée est un segment.
* Si $K \equiv R$ où $R \neq 0$, la courbe associée est un arc de cercle de rayon $1/|R|$.

Thm 38. Soit $c \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ un paramétrage par s d'une courbe régulière Γ. Notons $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la courbure associée. On a
$$\Gamma \text{ est convexe} \iff \gamma \text{ est de signe constant.}$$ [BÄR]

[DVP 2] On considère un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^3$, T-périodique, correspondant à une courbe fermée simple, défini comme suit : [FGN]
$$M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \longmapsto (x(s), y(s))$$
On suppose que : $\begin{cases} \text{le paramétrage de } M \text{ est normal} \\ \text{la courbure } \gamma \text{ de l'arc est positive} \end{cases}$.
Alors γ admet au moins 4 points critiques (appelés sommets) sur chaque période.

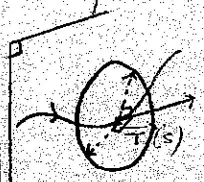
(Théorème des 4 sommets)

III. Etude des courbes dans l'espace $\mathbb{R}^3$. [JMM] & [BÄR]

1. Courbure, torsion. Repère de Frénet.

Def 39. Soit $c \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}^3)$ un paramétrage par s d'une courbe birégulière Γ. On définit toujours $\vec{T}(s) = f'(s)$ ($\neq \vec{0}$ par régularité)

Problématique. Comment définir le vecteur unitaire tangent, ainsi que la courbure ?



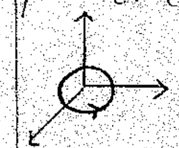
- l'ensemble des vecteurs unitaires perpendiculaire à $\vec{T}(s)$ forme tout un cercle,
- $\mathbb{R}^3$ n'a pas d'orientation naturelle,
- la définition de la courbure semble être compromise.

Rappel. Pour $c \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}^2)$, on avait $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\vec{N}(s)$, d'où $|\gamma(s)| = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}(s)\right\|$

Def 40. Soit $c \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}^3)$ un paramétrage par s d'une courbe birégulière Γ. On définit la courbure de Γ en s par

$$\gamma(s) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}(s)\right\| = \|\ddot{c}(s)\| > 0. \quad \text{Rayon de courbure } R(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\gamma(s)}$$

Ex 41. Cercle unité contenu dans le plan (xOy), paramétré par $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$



Courbure $\equiv 1$

Hélice à pas constant, paramétrée par $\gamma_{r,h}(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ où $\begin{cases} r>0 \\ h\neq 0\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Courbure $\equiv \frac{r}{r^2+h^2}$

Rq 42. Si l'hélice est paramétrée par $\gamma_{1/2,1/2}$, sa courbure vaut 1, comme celle du cercle. Cependant, le cercle n'est pas un déplacement de l'hélice. La donnée de seule la courbure ne caractérise plus les courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Def 43 Dans le cadre de la Def 40, le vecteur normal unitaire tangent est défini par $\vec{N}(s) = \ddot{c}(s)/\gamma(s)$, de sorte que $\begin{cases} \vec{N}(s) \perp \vec{T}(s) \\ \|\vec{N}(s)\| = 1 \end{cases}$

Enfin, le vecteur binormal tangent est défini par $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$, de sorte que $\begin{cases} \vec{B} \perp \vec{T},\ \vec{B} \perp \vec{N} \\ \|\vec{B}(s)\| = 1 \end{cases}$

Le repère orthonormé $(c(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ est appelé repère de Frenet de Γ en s. Cf. Fig 4

Def 44 [Torsion] On appelle torsion à Γ en $c(s)$, et on note $\tau(s)$ le réel défini par $\tau(s) = \langle \vec{B}(s), \frac{d\vec{N}}{ds}(s) \rangle$.
Si $\tau \neq 0$, on appelle rayon de torsion de Γ en $M(s)$, et on note $T(s)$ le réel défini par $T \stackrel{\text{déf}}{=} 1/\tau$.

Ex 45. La torsion de l'hélice à pas constant, paramétrée par $\gamma_{r,h}$, vaut $\tau = \frac{h}{r^2+h^2}$ en tout point.

Prop 46 [Formules de Frenet], en supposant $c \in \mathcal{C}^{k\geq 3}(I,\mathbb{R}^3)$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

R : rayon de courbure
T : rayon de torsion

2. Quelques interprétations géométriques

i/ Le plan osculateur

Def 47. Soit $c \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}^3)$ un paramétrage (non nécessairement par s) d'une courbe birégulière Γ. On appelle plan osculateur à Γ en $c(t)$ le plan passant par $c(t)$ et dirigé par $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$

Ex 48 La courbe Γ de représentation paramétrique
$$x(t) = \operatorname{ch} t,\ y(t) = \operatorname{sh} t,\ z(t) = t,\ t\in\mathbb{R}$$
est de classe $\mathcal{C}^2$ et birégulière. Une équation du plan osculateur au point $c(t)$ est $X\operatorname{sh} t - Y\operatorname{ch} t + Z - t = 0$

Rq 49. C'est l'analogue du cercle osculateur pour les courbes de l'espace. C'est le plan qui « épouse le mieux » la courbe.

ii/ Théorème fondamental des courbes de l'espace.

Théorème fondamental. La courbure et la torsion déterminent la courbe orientée à déplacement près.

Applications 50
- La torsion est nulle si et seulement si la courbe est planaire.
- Si la courbure et la torsion sont constantes, alors la courbe est une hélice à pas constant.

Rq 51 Faire l'étude métrique d'une courbe Γ de l'espace, c'est calculer, en tout point M de Γ, les éléments $\vec{T}, R, \vec{N}, \vec{B}$ et T.

Développements choisis :
- Inégalité isopérimétrique
- Théorème des 4 sommets.

ANNEXE

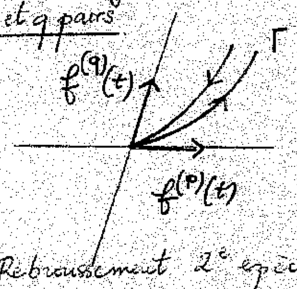
Proposition 11 (Etude des points singuliers) [Fig 1] [JMM]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe suffisante, Γ sa trajectoire, $t \in I$.

On note $\begin{cases} p \text{ le plus petit entier } \geq 1 \text{ tel que } f^{(p)}(t) \neq 0 \\ q \longrightarrow > p \text{ tel que } (f^{(p)}(t), f^{(q)}(t)) \text{ soit libre.} \end{cases}$

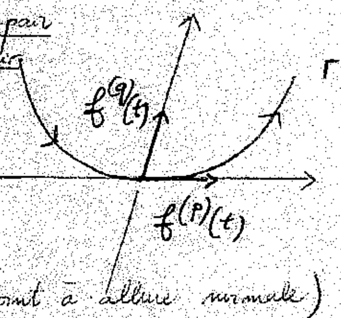
Au voisinage de $M(t)$, Γ a l'allure suivante :

p et q pairs



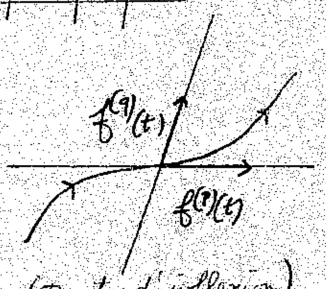
(Rebroussement 2^e espèce)

p impair / q pair



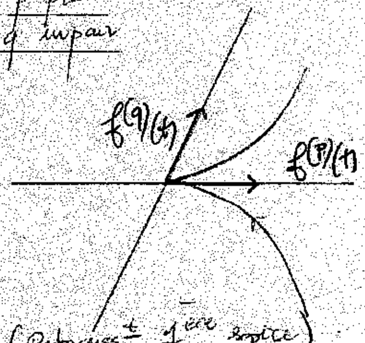
(Point à allure normale)

p et q impairs



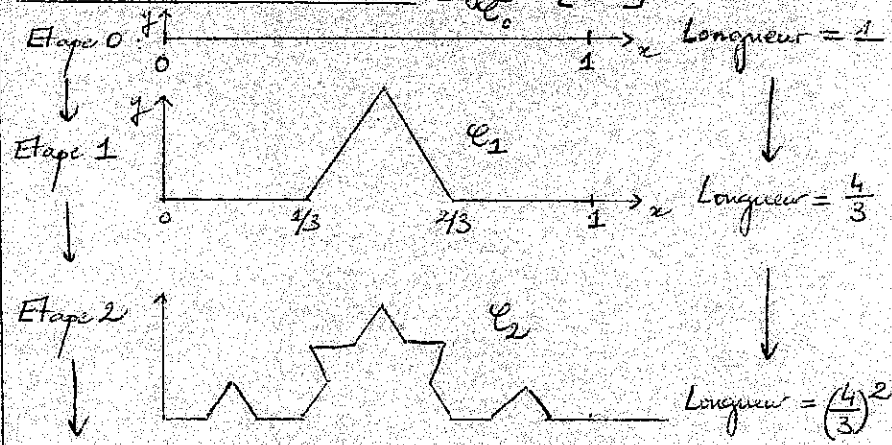
(Point d'inflexion)

p pair / q impair



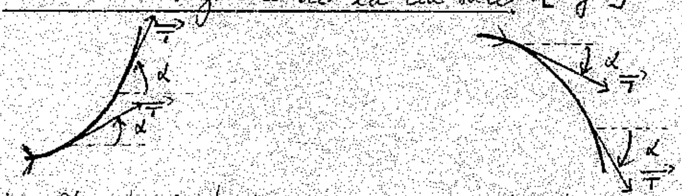
(Rebroussem^t 1^ère espèce)

Courbe de Von Koch : allure [Fig 2] [HAU]



(Admis) le paramétrage associé à $\mathcal{C}_n$ converge uniformément. La courbe associée au paramétrage limite est de longueur infinie.

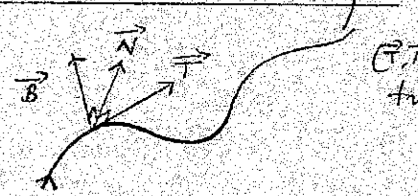
Caractérisation angulaire de la courbure [Fig 3]



α croît, la courbure est positive

α décroît, la courbure est négative

Repère mobile de Frenet dans l'espace [Fig 4]



$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ forme un trièdre direct.

Bibliographie

[JMM] Jean-Marie Monier, Géométrie - Cours et 400 exercices corrigés, 1^ère et 2^ème année MP, PSI, PC, PT.

[JD] Jacques Dixmier, Cours de mathématiques du premier cycle, chap 53.

[FGN] Oraux X ENS, Francinou Gianella Nicolas, Analyse 4.

[HAU] B. Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématique.

[BG] Berger - Gostiaux, Géométrie différentielle (ce bouquin est introuvable)

[BÄR] Christian Bär, Elementary differential geometry.

[ROU] F. Rouvière, Petit guide de calcul diff (...)

Autres développements possibles : Théorème de Jordan, version $\mathcal{C}^1$ (se recase partout : connexité, compacité, dérivabilité, holomorphie, ...)
: Etude de l'astroïde
: Centre de courbure d'une hyperbole équilatère / Théorème fondamental dans $\mathbb{R}^3$, etc ...