Leçon 217 : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples

## Préliminaire différentiel

**Th 1** (d'inversion locale)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$

Soit $x \in U$ tel que $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$

Alors il existe $V \subset U$ voisinage ouvert de $x$ tel que

$f : V \longrightarrow f(V)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

## I Définitions, premières propriétés

### 1) Sous-variété

**Def 2** : (Sous Variété)

On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de dimension $d \in \mathbb{N}$ lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall x \in M$, il existe des voisinages ouverts $U$ et $V$ de $x$ et $0$ dans $\mathbb{R}^n$, et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $f : U \longrightarrow V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$

(ii) $\forall x \in M$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec
- $dg$ surjective en tout point
- $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$

(iii) $\forall x \in M$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant $x$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert contenant $0$, et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec
- $dh$ injective en tout point
- $h$ est un homéomorphisme de $\Omega$ sur $U \cap M$

**Rq 3** :
- La dimension $d$ est unique pour $M$ connexe
- les sous variétés ressemblent localement à $\mathbb{R}^d$.

**Ex 4** :
- les sous espaces affines de dimension $d$ de $\mathbb{R}^n$
- la parabole $\mathcal{P} = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$, $d = 1$
- $\mathcal{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|^2 - 1 = 0\}$, $d = n-1$

### 2) Espace tangent

**Def 5** : (Espace tangent)

L'espace vectoriel tangent en $x \in M$ est

$$T_x M = L/_{\sim} \quad \text{où } L = \{\gamma : ]-1, 1[ \to M, \mathcal{C}^1, \gamma(0) = x\}$$

avec $\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff \gamma_0'(0) = \gamma_1'(0)$

c'est un espace vectoriel de dimension $d$

**Ex 6** :
- $T_0 \mathcal{P} = (0x)$

**Prop 7** : L'espace vectoriel tangent à $M$ en $x \in M$ est

(ii) $\operatorname{Ker}(dg(x))$

(iii) $\operatorname{Im}(dh(x))$

### 3) Structure différentielle

**Def 8** (Application $\mathcal{C}^k$)

Soient $M, N$ deux sous variétés $\mathcal{C}^k$. $f : M \longrightarrow N$ est dite $\mathcal{C}^k$ si $\forall x \in M$, il existe des paramétrisations locales de $M$ et $N$ $(U, \varphi)$ et $(V, \psi)$ en $x$ et $f(x)$ telles que

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \phi(V)$ est $\mathcal{C}^k$

**Def 9 :** (Application tangente)

$\varphi$ et $\psi$ définissent des isomorphismes canoniques $\begin{cases} \theta_\varphi : T_x M \to \mathbb{R}^p \\ \theta_\psi : T_{f(x)} N \to \mathbb{R}^q \end{cases}$

On définit l'application tangente en $x$ par

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "T_x f"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(x)} N \arrow[d, "\theta_\psi"] \\ \mathbb{R}^p \arrow[r, "d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

**Rq 10 :** Si $f$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \supset M$, l'application tangente coïncide avec la restriction à $T_x M$ de la différentielle usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

## II Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Une surface de $\mathbb{R}^3$ est une sous variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

**Def 11 :** (Première forme fondamentale)

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface.

La première forme fondamentale est la restriction de la forme quadratique $\mathbb{R}^3 \ni V \longmapsto \|V\|^2$ à $\{T_x S, x \in S\}$

**Rq 12 :** En pratique, si $\varphi : \Omega \to X$ est une paramétrisation locale de $X$, la première forme fondamentale s'écrit

$$(dx \; dy) \underbrace{\begin{pmatrix} \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle & \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle & \langle \varphi_y ; \varphi_y \rangle \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_{I,\varphi}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

**Def 13 :** (Distance)

La distance de $P$ à $Q \in S$ est définie par

$$d(P,Q) = \operatorname{Inf} \{ \text{Longueur}(\gamma),\ \gamma : [0,1] \to S\ \mathcal{C}^1,\ \gamma(0) = P,\ \gamma(1) = Q \}$$

**Def 14 :** (Angle entre deux courbes)

L'angle entre deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 \subset S$ est l'angle entre leurs vecteurs tangents :

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0) \rangle}{\|\gamma_1'(t_0)\| \|\gamma_2'(t_0)\|}$$

Grâce à la première forme fondamentale, on a une caractérisation des applications conservant distance ou angle :

**Th 15 :** Soit $f : S_1 \longrightarrow S_2$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

(i) $f$ est une isométrie si et seulement si $\forall \varphi : \Omega \to S_1$ paramétrisation locale, $\mathcal{F}_{I,\varphi} = \mathcal{F}_{I, f\circ\varphi}$

(ii) $f$ est une application conforme si et seulement si $\forall \varphi : \Omega \to S_1$, $\exists \lambda_\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{F}_{I,\varphi} = \lambda_\varphi \cdot \mathcal{F}_{I, f\circ\varphi}$$

DÉVELOPPEMENT 1

## III Sous variétés et matrices

Dans la suite, on considère que $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ; on considère donc des sous variétés de $M_n(\mathbb{R})$.

(i) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ donc est une sous variété de dimension $n^2$.

**Th 16:** (Von Neumann) Cartan

Tout sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

(ii) $O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}), \underbrace{{}^tMM - I = 0}_{g(M)} \}$ est une sous variété compacte de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ : $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$dg(M)\cdot H = {}^tHM + {}^tMH \text{ est surjective dans } S_n(\mathbb{R})$$

de plus, $T_I(O_n(\mathbb{R})) = A_n^t(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.

(ii)' $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap GL_n^+(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $O_n(\mathbb{R})$ et de mêmes espaces tangent. Elle est de plus connexe.

(iii) $U_n(\mathbb{C}) = \{ M \in M_n(\mathbb{C}), {}^*MM - I = 0 \}$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ de dimension $n^2$.

$$T_I(U_n(\mathbb{C})) = A_n^*(\mathbb{C}), \text{ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes}$$

Elle est connexe et compacte.

(iii)' $SU_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \cap \{ M \in M_n(\mathbb{C}), \det(M) = 1 \}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $n^2 - 1$

$$T_I(SU_n(\mathbb{C})) = A_n^*(\mathbb{C}) \cap \operatorname{Ker}(\mathrm{Tr})$$

Elle est connexe et compacte

**Th 17:**

- $SO_4(\mathbb{R}) \simeq SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) / \{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\}$

- $SO_3(\mathbb{R}) \simeq SU_2(\mathbb{C}) / \{-I_2, I_2\}$

où les isomorphismes de groupes sont aussi des homéomorphismes.

DÉVELOPPEMENT 2

## Références

- [MNE]
- Jacques La Fontaine : "Intro aux variétés différentielles"
- Gramond
- Larry C. Grove : "Geometrical Algebra"
- Michèle Audin : "Géométrie"
- Do Carmo
- Rouvière