

[ROU]

I - Définitions et premiers exemples1°) Première définitionDef 1: * Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , $a \in X$ et de \mathbb{N} .On dit que X est lisse en a , de dimension d , s'il existe un difféomorphisme F de classe \mathcal{C}^k d'un voisinage ouvert U de a dans \mathbb{R}^n sur le voisinage ouvert $F(U)$ de 0 dans \mathbb{R}^n ,tel que : $F(X \cap U) = X' \cap F(U)$, où $X' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.* On dit que X est une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n si X est lisse, de dimension d , en chacun de ses points.Exemple 2: - Les courbes d'équation $|y| = x$, $y^2 = x^2$, ainsi que le cône ne sont pas lisses en 0 .- La sphère S^{n-1} et le tore T^n sont des sous-variétés de dimension $n-1$ et n .Prop 3: * L'image par un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de \mathbb{R}^n d'une sous-variété de dimension d est une sous-variété de dimension d ($k \geq 1$).* Un ouvert d'une sous-variété de dimension d est une sous-variété de dimension d .Rem 4: Une sous-variété de dimension d est localement difféomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^d . En particulier elle est localement connexe par arcs.2°) Autres définitions : Théorème des sous-variétésDef 5: Une immersion (resp. submersion) de classe \mathcal{C}^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q est une application de classe \mathcal{C}^k de U dans \mathbb{R}^q dont la différentielle en tout point est injective (resp. surjective).Thm 6: Inversion localeSoit f une application de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^p . Soit $a \in U$ tel que $Df(a)$ soit inversible.Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a tel que $f: V \rightarrow f(V)$ soit un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.Thm 7: "des sous-variétés"Soit $X \subset \mathbb{R}^d$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :(i) X est une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^d .(ii) Pour tout $a \in X$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^d contenant a et une submersion de classe \mathcal{C}^k $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $U \cap X = g^{-1}(0)$.
(implicite)(iii) Pour tout $a \in X$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^d contenant a , un ouvert Ω de \mathbb{R}^d contenant 0 et $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est à la fois une immersion de classe \mathcal{C}^k et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap X$.
(paramétrique)(iv) $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.Pour tout $a \in X$, $a = (a_1, a_2)$, il existe un ouvert $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ contenant a_1 , un ouvert $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ contenant a_2 et $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ de classe \mathcal{C}^k tels que $\varphi(a_1) = a_2$ et $X \cap U_a = \{(x, \varphi(x)), x \in U_1\}$

(graphe)

Exemples.

de \mathbb{R}^n .

Sous-variétés

217

[LAF]

[LAF]

Exemple 8: le cercle S^1 :

- $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ en est une paramétrisation locale
- $S^1 = g^{-1}(0)$, où $g: (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, en donne une représentation implicite

II - Espace tangent

[ROU]

1°) Définition et premières propriétés

Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension d .

Déf 9: Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent en $a \in X$ à X s'il existe une fonction dérivable $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($a \in I$ est un intervalle réel ouvert contenant 0) telle que:

$$\gamma(I) \subset X, \quad \gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v$$

Prop 10: Soit $a \in X$.

Alors l'ensemble des vecteurs tangents en a à X forme un sous-espace vectoriel de dimension d , appelé espace tangent en a à X .

Exemple 11: - L'espace tangent en 0 à la parabole

$y = x^2$ est l'axe des abscisses (Ox)

- Plan tangent à la sphère (cf fig. 3)

Prop 12: On conserve les notations du théorème 7.

L'espace tangent à X en $a \in X$ s'exprime ainsi:

- $\text{Ker}(dg(a))$ pour la définition implicite
- $\text{Im}(dh(a))$ pour la définition paramétrique

2°) Applications en analyse

Thm 13: Extremum liés

[GOU]

Soient $f, g_1, \dots, g_r: U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , U étant un ouvert de \mathbb{R}^n . On pose $\Gamma = \{x \in U / g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Alors si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que:

$$df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$$

Applications 14s - inégalité arithmético-géométrique: pour $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$,

[GOU]

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- recherche du point le plus proche de l'origine d'une ellipse du plan (cf fig. 4)

[ROU]

Lemme 15: Morse

[ROU]

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi: x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

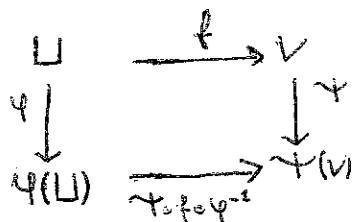
Application 16: position relative d'une surface par rapport à un de ses plans tangents

[LAF]

III - Structure différentielle

Def 17: Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n . Une carte locale de M est la donnée d'un couple (U, φ) où U est un ouvert inclus dans M et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

Def 18: Soient M et N deux sous-variétés de \mathbb{R}^n , $f: M \rightarrow N$ continue. f est dite de classe C^k si pour tout $x \in M$, il existe des cartes locales de M et N (U, φ) et (V, ψ) en x et en $f(x)$, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(V)$ soit de classe C^k .

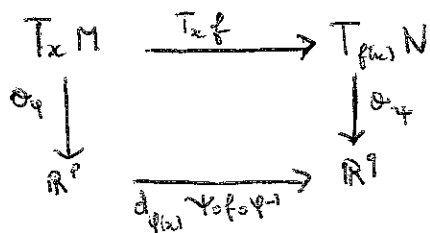


Def 19: on reprend les notations de la def 18 et on suppose que M et N sont de dimension p et q .

φ et ψ définissent en tout point $x \in M$ des isomorphismes

$$\mathcal{O}_\varphi: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_\psi: T_{f(x)} N \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

On définit alors $T_x f$, l'application tangente de f en x par:



Cette application est souvent notée $df(x)$.

Rem 20: si M est un ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace tangent en x s'identifie à \mathbb{R}^n , et l'application tangente à la différentielle usuelle.

IV - Exemples : sous-variétés et matrices

Dans ce paragraphe, on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^{n^2} .

Exemple 21: $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc une sous-variété de dimension n^2 .

Thm 22: Cartan - van Neumann

Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 23: $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = -M\}$ est une sous-variété compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

On a $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .

$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

On a $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R})) = \ker(\text{tr})$, i.e. l'ensemble des matrices de trace nulle.

On montre par un procédé analogue que $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / M^* = -M\}$ et $SU_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$ sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ de dimensions n^2 et $n^2 - 1$.

On a que $T_{I_n}(U_n(\mathbb{C}))$ est l'espace vectoriel des matrices antihermitiennes et que $T_{I_n}(SU_n(\mathbb{C})) = T_{I_n}(U_n(\mathbb{C})) \cap \ker(\text{tr})$.

[M-T]

[M-T]

ou

[G-T]

Références :

- [ROL] : Rouvière, petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et l'agrégation
[LAF] : Lefontaine, Introduction aux variétés différentielles
[GOU] : Gaudin, Analyse
[N-T] : Naimen-Talend, groupes de Lie classiques
[G-T] : Gornard-Talend, Calcul différentiel

Figure 1: X est lisse au point a

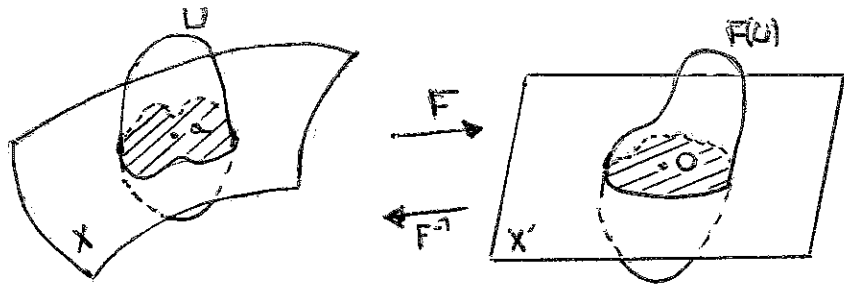


Figure 2 : Vecteur tangent en a à X

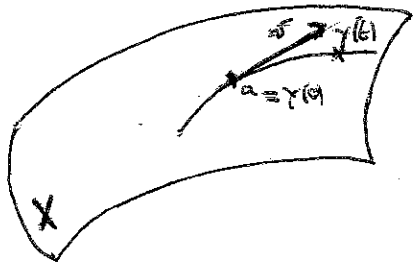


Figure 3 : Plan tangent à la sphère

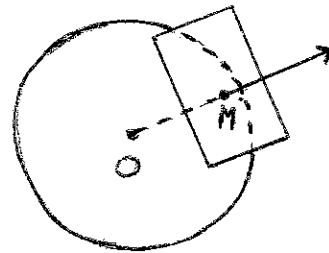


Figure 4 : Recherche du point le plus proche de l'origine sur C_3

