217 — Sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples

[ROU] p192

I] Définitions équivalentes, premiers exemples

1) Définition et premiers exemples [ROU]

p197 (*) **Déf 1** Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$ et d un entier naturel. On dit que V est lisse en a, de dimension d, s'il existe un difféomorphisme F de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur le voisinage ouvert $F(U)$ de U dans $\mathbb{R}^n$ qui transforme V en un sev de dimension d, ie:
$F(V \cap U) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$

On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse de dimension d en chacun de ses points

Rq 2 * Si V est lisse en a, elle l'est aussi en tout point voisin

* Si φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, V est lisse en a (de dim d) ssi $\varphi(V)$ est lisse en $\varphi(a)$ (de dim d)

p269 **Ex 3** Le cône C d'équation $x^2+y^2-z^2=0$ est lisse, de dimension 2 en chacun de ses point sauf l'origine.

C-ex 4 $y=|x|$ n'est pas lisse en l'origine. ce n'est donc pas une sous variété

2) Définitions équivalentes. [LAF]

p25 **Thm 5** (Inversion locale) Soit f une application C^k $(k \geq 1)$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$ avec df_a inversible. Alors il existe un ouvert V inclus dans U, $a \in V$ tq $f: V \to f(V)$ soit un difféomorphisme de classe C^k.

Thm 6 (Fonctions implicites)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f: (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose $f(a,b)=0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y est inversible.
Alors $\exists V$ (voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$), W (voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$) avec $V \times W \subset U$ et $\det D_y f(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi: V \to W$ telle que
$(x \in V, y \in W$ et $f(x,y)=0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$
De plus φ est C^1 sur V.

Déf 7 (immersion/submersion)
* Une immersion (de classe C^k) d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est une application (C^k) de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est injective. p27
* Une submersion est de même une application de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective.

Thm 8 (définitions équivalentes)
Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes. p29

i) M est une sous variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$

ii) $\forall a \in M$, $\exists$ un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g: U \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$ (définition implicite)

iii) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et une application $h: \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$. (définition paramétrique)

iv) $\forall a \in M$, $\exists$ un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées $U \cap M$ soit egal au graphe de G (graphe)

Rq 9 ii) $\Rightarrow$ i) résulte du théorème des fonctions implicites (6) [ROU] p201
iii) $\Rightarrow$ iv) résulte du théorème d'inversion locale (5)

Ex 10
* La sphère $S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}$ est une sous variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ car $x \mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$ est une submersion (définition implicite)

* Le tore $T^n = \{z=(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 = \dots = |z_n|^2 = 1\}$

$$= \left\{ x = (x_1,\dots,x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

est une sous variété de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ de dimension n car $h : (t_1,\dots,t_n) \to (e^{it_1},\dots,e^{it_n})$ est une immersion (définition paramétrique)

[ROU] p273 **C-ex 11** : Une intersection de sous-variétés n'est pas nécessairement une sous-variété.

Soit C définit par les équations $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x^2+y^2-2x = 0 \end{cases}$

C n'est pas lisse au point $(2,0,0)$.

p32 **Ex 12** On peut avoir plusieurs représentation pour une même sous-variété : par exemple le cercle peut être défini par $\begin{cases} t \longmapsto (\cos t, \sin t) \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

II) Espace tangent

1) Définitions et premières propriétés

[ROU] p198 **Déf 13** Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent en a à V s'il existe une fonction dérivable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) telle que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=v$.

[LAF] p33 **Ex 14** Le seul vecteur tangent à la courbe C image de $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (t^2,t^3)$ à l'origine est le vecteur nul.

Prop 15 Les vecteurs tangents en un point à une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ forment un sev de dimension p

Déf 16 L'espace tangent à une sous variété M de $\mathbb{R}^n$ en un point a, noté T_aM, est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^n$ tq $m-a$ soit tangent à M en a.

Prop 17 En reprenant les notations du théorème 8, on a : [ROU] p201

1) $T_aM = \ker Dg(a)$ pour la définition implicite
2) $T_aM = \operatorname{Im} Dh(a)$ pour la définition paramétrique
3) $T_aM =$ le graphe de $DG(a_1,\dots,a_p)$.

2) Applications en analyse

Thm 18 (Extrema liés)

Soient $f, g_1,\dots,g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par Γ l'ensemble $\{x \in U,\ g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ $\boxed{\text{DVP}}$ [GOU] p317

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a},\dots,dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes alors il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ tels que

$$df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \dots + \lambda_r dg_{r,a}. \quad \circledast$$

Rq 19 Interprétation géométrique :

Grâce à la condition d'indépendance des $dg_i(a)$ [OA] p20

Γ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ autour de a

De plus $\circledast$ est équivalente à

$\bigcap_{i=1}^{r} \ker dg_i(a) \subset \ker df(a)$

Donc $df(a)$ est nulle sur l'espace tangent à Γ en a.

Appli 20 Diagonalisation des endomorphismes symétriques p21

Thm 21 (Lemme de Morse)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p,n-p)$. Alors il existe un difféomorphisme $x \longmapsto u = \varphi(x)$ entre 2 voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0)=0$ et p354 [ROU]

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2. \quad \boxed{\text{DVP}}$$

Appli 22 position relative d'une surface par rapport à un de ses plans tangents

III) Exemples

1) Le groupe des matrices [H2G2]

Dans ce paragraphe on identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$

Thm 23 Soit $m \in \mathbb{N}^*$

p268 Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M_n(\mathbb{R})$

L'espace tangent à $GL_n(\mathbb{R})$ en l'identité $e = I_n$ est :

$$T_e(GL_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$$

p270 **Prop 24** Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ Son espace tangent en l'identité est le sous espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques

p271 **Prop 25** $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2-1. Son espace tangent en l'identité est :

$$sl_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}),\ tr(M) = 0 \}.$$

2) Surfaces de $\mathbb{R}^3$ [ROU]

[ROU] p275

Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = 0\}$ et $(a,b,c) \in S$ tel que $f'_z(a,b,c) \neq 0$

Alors $F : (x,y,z) \mapsto (x,y,f(x,y,z)) = (u,v,w)$ est un difféomorphisme local transformant S en le plan $w = 0$

Alors S peut être définie (localement) comme un graphe ou paramétriquement

Graphe : S est au voisinage de (a,b,c) le graphe de la fonction $(x,y) \mapsto \varphi(x,y,0)$ où $\varphi = F^{-1}$.

paramétriquement : Soient V un voisinage ouvert de (a,b,c) et W un voisinage ouvert de $(a,b,0)$ tel que $F : V \to W$ soit un difféomorphisme. Alors

$((x,y,z) \in S \cap V) \iff ((u,v,0) \in W$ et $x = u, y = v, z = \varphi(u,v,0))$

La paramétrisation est donc $(u,v) \mapsto (x,y,z) = (u,v,\varphi(u,v,0))$

Plan tangent :

Du point de vue du graphe, l'équation du plan tangent est :

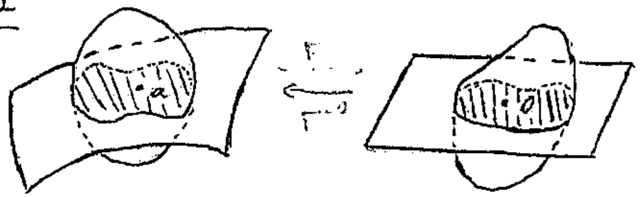
$$-f'_z \varphi'_x X - f'_z \varphi'_y Y + f'_z Z = 0 \qquad (P)$$

Du point de vue paramétrique : la différentielle en (a,b) de l'application $(u,v) \mapsto (u,v,\varphi(u,v))$ est :

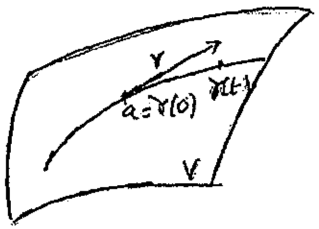
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

et l'image de $\mathbb{R}^2$ par cette application est bien le plan (P).

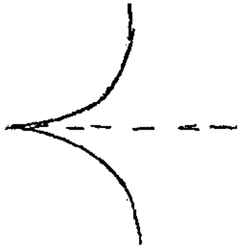
Déf 1



Déf 13



Ex 14



Références:

[ROU] : Rouvière : Petit guide de calcul différentiel

[LAF] : Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles

[OA] : Objectif agrégation

[GOU] : Gourdon analyse (pour extrema liés)

[H_2G_2] : Caldero – Germoni
Histoires hédonistes de groupes et géométries

Théorème des extremas liés

Camille FRANCINI et Laura GAY

Référence : GOURDON : Analyse p. 317 et 327

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \dots, g_r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. On définit

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Idée : maximiser (ou minimiser) f sur un sous-ensemble de U de la forme de Γ.

Théorème (***Théorème des extremas liés de Lagrange***)

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $\mathrm{D}g_1(a), \dots, \mathrm{D}g_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

Preuve :

1. Soit $s = n - r$. On peut identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit donc les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme (x, y) où $x = (x_1, \dots, x_s)$ et $y = (y_1, \dots, y_r)$.
   Posons $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$.
   Déjà, $r \leqslant n$ car les formes linéaires $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille libre et la dimension de l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ est n.
   De plus, si $r = n$, le théorème devient évident car les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.
   On peut donc supposer que $r < n$, ie $s \geqslant 1$.

2. Les formes linéaires $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une famille libre, ainsi la matrice :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$
   est de rang r [1].
   On peut donc [2] en extraire une sous-matrice $r \times r$ inversible. Quitte a changer le nom des variables, on peut supposer que :
$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \neq 0$$
   Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \dots, g_r)$ par : $D_y g(a)$ est inversible.

3. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a)(\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction de classe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe C^1 tels que :
$$(x \in U', (x, y) \in \Omega \text{ et } g(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = \varphi(x))$$
   En d'autre termes, sur un voisinage de a, les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Comme $a \in \Gamma$, on a $\beta = \varphi(\alpha)$

4. Posons $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_n) : x \in U' \subset \mathbb{R}^s \mapsto (x, \varphi(x))$. Alors $\psi(x) \in \Gamma$ par le TFI. Posons également, sur U', $h = f \circ \psi$.

1. car r lignes donc au plus r et les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille indépendantes. Or les $\mathrm{D}g_i(a)$ sont une combinaison linéaire des dérivées partielles. Supposons par l'absurde que les r lignes soient liées. Avec les deux combinaisons linéaires combinées (ahah) on arrive à une absurdité.
2. cf Debeaumarché

Comme $h(\alpha) = f(a)$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a).
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$,

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

En remarquant que $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ et que $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$. Et comme $a = \psi(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = 0$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur U' donc pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$. Donc, par un calcul similaire à celui du dessus, pour $i \in [\![1, s]\!]$:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0$$

Si on considère donc la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

Les s premiers vecteurs colonnes de M s'expriment, d'après les deux formules aux dérivées partielles ci-dessus, linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes, donc $\mathrm{rg}(M) \leqslant r$. Ainsi les $r+1$ lignes de M forment une famille liée.[3]
Ceci entraine l'existence de réels $\mu_0, \ldots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\mu_0 \mathrm{D}f(a) + \mu_1 \mathrm{D}g_1(a) + \cdots + \mu_r \mathrm{D}g_r(a) = 0$$

Comme la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_i$ est libre, $\mu_0 \neq 0$ donc en posant $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, on obtient

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

■

Notes :

✓ La famille $(\mathrm{D}g_i(a))$ étant libre, les multiplicateurs de Lagrange λ_i sont uniques.
♣ Joseph, Comte de LAGRANGE (1736 - 1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome italien. Il passa trente ans dans le Piémont, puis vingt-et-un ans à Berlin, et le restant de ses jours à Paris. Dans une lettre adressée à Euler (plus grand mathématicien de l'époque), il jette les bases du calcul variationnel. Cet échange est le début d'une longue correspondance entre les deux hommes. Napoléon Ier lui montra son estime toute particulière en le nommant membre du Sénat conservateur avec Monge et Laplace.

3. Plus précisément, ça vient de $\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M)$, le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes de M

Lemme de Morse

Camille FRANCINI et Laura GAY d'après Maylis VARVENNE et Caroline ROBET

Référence : ROUVIÈRE : Petit guide de calcul différentiel p. 354 (exercice 114) et p. 210 (exercice 66)

Lemme (***Réduction des formes quadratiques, version différentiable***)

Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$$

(i.e. toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente i.e. se ramène à celle-ci par changement de base)

Preuve :

Idée : appliquer le théorème d'inversion locale.

Etape 1 :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|\cdot\|$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H) - A_0 \\ &= A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H - A_0 \\ &= {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|)\end{aligned}$$

Or A_0 symétrique donc ${}^tHA_0 = {}^t(A_0H)$. De plus, $H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$ est linéaire. D'où

$$\mathrm{D}\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$$

D'où $H \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (i.e. le noyau est formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétrique).

$\mathrm{D}\varphi(I_n)$ n'est donc pas bijective [1] (problème sur l'injectivité), on ne peut pas appliquer le TIL. Idée : la restreindre..

Etape 2 :

On pose $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. On a également vu que $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

Alors $F \cong S_n(\mathbb{R})$ par $H \to A_0^{-1}H$. Et $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \cong \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le même isomorphisme (cf note $\star$). Donc :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n))$$

Soit $\chi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. Déjà, $I_n \in F$.

$\mathrm{D}\chi(I_n)$ est bijective. En effet, par l'égalité des dimensions l'injectivité suffit :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\chi(I_n)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \cap F = \{0\} \qquad \text{(par la somme directe)}$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles, car det est continue donc on peut trouver un ouvert U' de I_n de matrices de déterminant non nul donc inversibles, on peut alors prendre $U \cap U'$) tel que χ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \chi(U)$.

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \chi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $A = {}^t\chi^{-1}(A)A_0\chi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\rho = \chi^{-1}$ ■

1. On peut exhiber la surjectivité car pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{D}\varphi(I_n)\left(\dfrac{A_0^{-1}A}{2}\right) = \dfrac{1}{2}({}^tA + A) = A$

Théorème (*Lemme de Morse à n variables - ≈1934*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^3 sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$.
On suppose que $\mathrm{D}f(0) = 0$, que $\mathrm{D}^2 f(0)$ est non dégénérée (donc inversible car c'est une matrice) et que $\mathrm{sign}(\mathrm{D}^2 f(0)) = (p, n-p)$.
Alors il existe φ un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
- ⋆ $\varphi(0) = 0$
- ⋆ $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

Preuve :

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \mathrm{D}f(0)(x) + \int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{D}^2 f(tx)\right)(x,x)\mathrm{d}t \\ &= {}^t x \left(\underbrace{\int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{D}^2 f(tx)\right)\mathrm{d}t}_{} \right) x \\ &= \quad {}^t x \qquad Q(x) \qquad x \end{aligned}$$

Q est de classe C^1. De plus, $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ car $Q(0) = \dfrac{\mathrm{D}^2 f(0)}{2}$.
On peut donc appliquer le **Lemme** :
Il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A) Q(0) \rho(A)$$

De plus comme $Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & Q(x) \end{array}$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$.
Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$, donc

$$Q(x) = {}^t \rho(Q(x)) Q(0) \rho(Q(x))$$

On pose $M(x) = \rho(Q(x))$ et on obtient

$$\underline{Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)}$$

D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester appliquée à $Q(0)$ qui est aussi de signature $(p, n-p)$, $\exists A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) = {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$$

Finalement

$$f(x) - f(0) = {}^t x {}^t M(x) {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A M(x) x$$

En posant $\varphi(x) = AM(x)x$, on a

$$f(x) - f(0) = {}^t \varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$$

Et donc avec $u = \varphi(x)$, on a bien
- ⋆ $\varphi(0) = 0$
- ⋆ $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

Il reste à montrer que φ définit un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0. φ est C^1 car M l'est.
Calculons la différentielle à l'origine de φ :

$$\begin{aligned} \varphi(h) - \varphi(0) &= A^{-1} M(h) h \\ &= A^{-1}\left(M(0) + \mathrm{D}M(0).h + o(\|h\|)\right) h \\ &\quad \text{car } M \text{ est différentiable en 0 puisque } \rho \circ Q \text{ l'est} \\ &= A^{-1} M(0) h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Comme $A^{-1}M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{D}\varphi(0)$ est inversible.
D'après la théorème d'inversion locale appliqué à φ, il existe deux voisinages de 0 (en fait de 0 et de $\varphi(0) = 0$) tels que φ soit un C^1-difféomorphisme entre ces deux voisinages. ■

Notes :

♣ Marston Morse (1892-1977) (à ne pas confondre avec Anthony Morse, mathématicien également) est un mathématicien américain, connu surtout pour ses travaux sur le calcul des variations global, un sujet où il a introduit la technique de topologie différentielle appelée depuis théorie de Morse.