

Sous-variétés de \mathbb{R}^n : Exemples.

217

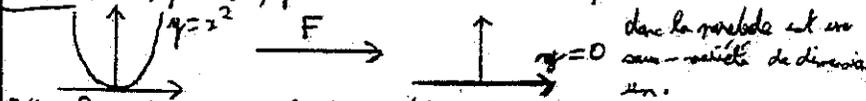
I - Sous-variétés, définitions et exemples

1) Qu'est-ce qu'une sous-variété de \mathbb{R}^n ?

Def 1: Soit M sous-ensemble de \mathbb{R}^n , $a \in M$, $d \in \mathbb{N}$, alors M est liée en a , de dimension d s'il existe un difféomorphisme F de \mathbb{R}^d sur un voisinage ouvert U de a sur $F(U)$ voisinage ouvert de a , qui transforme $M \cap U$ en une sous-variété de dimension d , i.e. $F(M \cap U) = N \cap F(U)$ avec $N = \mathbb{R}^d \times \{0\}$.

Def 2: (Caract. locale) M est une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n si M est liée de dimension d en chacun de ses points.

ex: $F: (x, y) \rightarrow (x, y-x^2)$ est un \mathbb{R}^2 -difféomorphisme.



Def 3: On appelle courbe liée / surface liée / hypersurface liée une sous-variété de dimension $1/2/n-1$.

ex: ellipse est une courbe liée, la courbe sin de sa courbe est une surface liée, \mathbb{R}^n est une hypersurface liée.

2) Théorie des sous-variétés

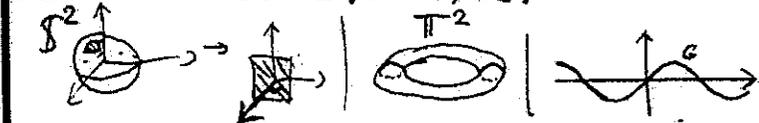
Théorème 4: $M \subset \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) M est une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n .
- (ii) (Def implicite) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a et une sous-variété $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n-d$ telle que $U \cap M = \gamma^{-1}(\{0\})$.
- (iii) (Def paramétrique) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , un ouvert Ω de \mathbb{R}^d contenant 0 et une application liée $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion de \mathbb{R}^d et un difféomorphisme de Ω sur $U \cap M$ tel que $h(0) = a$.
- (iv) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , un ouvert V de \mathbb{R}^d contenant (a_1, \dots, a_d) (graph) et une application liée G de V dans \mathbb{R}^n-d tel que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit le graph de G .

ex: $S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ la sphère, est une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+1} par (ii).

$\Pi^n = \{x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1) = 0\}$ le tore, est une sous-variété de \mathbb{R}^{2n} de dimension n par (iii) avec $h: (t_1, \dots, t_n) \rightarrow (\cos t_1, \sin t_1, \dots)$.

$G = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 par (iv).



3) Qu'est-ce qui n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^n ?

Le graph d'une fonction n -liée n'est pas une sous-variété (graph)

ex: $\{(x, |x|), x \in \mathbb{R}\}$

Parité, on a des courbes multiples.

ex: $y^2 - x^3 = 0$

Une courbe avec un point double n'est pas une sous-variété (même si le point double est à l'origine)

ex: $x^2 - y^2 = 0, t \rightarrow (\frac{3t}{1+t^2}, \frac{3t^2}{1+t^2}), t \geq -1$

Une variété ne peut avoir plusieurs dimensions.

ex: la courbe passe de la dimension 2 à la dimension 0 en son sommet

vous avez 1

II - Espaces Tangents

1) Définition

Def 5: On dit qu'un vecteur est tangent en un point a de $A \subset \mathbb{R}^d$ s'il existe une application différentiable $c:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $c] - \epsilon, \epsilon[\subset A, c(0) = a$ et $c'(0) = v$.

Prop: Les vecteurs tangents en un point à une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n forment une sous-espace vectoriel de dimension d .

Def 7: L'espace tangent à une sous-variété M de \mathbb{R}^n , en un point a , noté $T_a M$ est l'ensemble des points v de \mathbb{R}^n tels que v est tangent à M en a .

Application: si $M: y^2 - x^3 = 0$ est une sous-variété de dimension 1, l'espace tangent en $(0,0)$ est de dimension 1, car il est de dimension 0 donc c'est faux!

Prop 8: Avec les notations du théorème 4, l'espace tangent à M en a est

- (i) $\text{Ker}(Dg(a)) + a$
- (ii) $\text{Im}(DR(0)) + a$
- (iii) $\text{Graph}(DG(a_1, \dots, a_d)) + a$

Exemple: (i) $M: g(x, y) = x^2 + y^2 - 1; Dg(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $M: R(t) = (-\sin t, \cos t); DR(0) = (-1, 0)$

(iii) $G(x) = \sqrt{1-x^2}; DG(0) = 0$

graph de $DG(0) = \{(x, y), y = 0\}$

Donc $T_{(0,1)} M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

[ROU] 269-273

[LAF] 33-34

[ROU] 201

2) Position d'une surface par rapport à son plan tangent

[LAF] p 36

Soit S une surface lisse de \mathbb{R}^3 et $(a, b, c) \in S$, le plan tangent en (a, b, c) est alors de la forme:

$$(a) (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + (z-c) \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

$$(b) (a, a) \mapsto \begin{pmatrix} a + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)v \\ b + \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)v \\ c + \frac{\partial l}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial l}{\partial y}(0,0)v \end{pmatrix}$$

DVP 1

[ROU] p 354

Lemme (de Morse) 9: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{P}^3 avec U ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0 , alors si $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$, on a existence de φ en \mathcal{C}^1 difféomorphe entre deux voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(\varphi(x)) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$

[LAF] p 34

Si $f \in \mathcal{C}^2$ et $D^2f(a)$ non dégénérée, on peut appliquer Morse sur $g(x) = f(x+a) - Df(a)x$ pour avoir $f(x) - f(a) - Df(a)x = \varphi_1(x)^2 + \dots$

Application: L'interaction de la surface S avec son plan tangent en $a \in S$ est localisée déterminée par l'espace tangent de la forme quadratique de signature égale à celle de la Hessienne $D^2f(a)$, ou $D^2f(a)$ est non dégénérée.

En particulier, S se coupe son plan tangent que en $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (1, 1)$. (voir exercice 2).

3) Extrema sur une variété.

[AVE] p 102-103

Définition 10: U ouvert intervalle M sous-variété, on dit que $f|_U$ est un extremum local en $m \in U \cap M$ si $f|_{U \cap M}$ admet un extremum local en m .

Exercice 11: si f est \mathcal{C}^1 , il faut que $Df(m)|_{T_m(M)} = 0$ pour que m soit un extremum local.

[OAJ]

Interprétation: si M est défini par $g(x) = 0$, alors le théorème 11 s'écrit

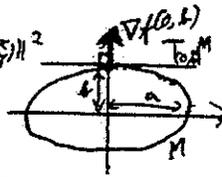
$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(Dg_i(m)) \subset \text{Ker}(Df(m)) \text{ ou encore } \nabla f(m) \text{ est orthogonal à } T_m M.$$

[ROU] p 408-409

Exemple: $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $f(x, y) = x^2 + y^2 = \|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

si $a \neq b$, 4 extrema: $(\pm a, 0)$ et $(0, \pm b)$



Exercice 12: Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1$ définies sur U jacobien et linéaire indépendants en $a \in U$, alors les généralisations des g_i définissent localement une sous-variété M de \mathbb{R}^n . Alors si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et si f a un extremum local en a , alors il existe λ_i tels que $Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_k Dg_k(a)$.

[AVE] p 103 (modifié)

Rq: les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 13: Un admet une forme quadratique d'un espace euclidien par rapport à une base orthogonale de vecteurs propres.

Exercice 14: Les extrema de $f(x) = \|x\|^2$ sur la quadrique $Q(x) = 1$ sont les directions de celle-ci avec les sous-espaces propres de A la matrice de Q .

[ROU] p 407-409

Remarque: le lemme nous donne aussi que si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est non dégénérée, alors f a un minimum local strict en a si et seulement si $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (n, 0)$; et un maximum local strict si $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (0, n)$.

III - Quelques exemples fondamentaux de sous-variétés.

1) Sous-variétés de dimension 1

Définition 15: On appelle arc paramétré de classe \mathcal{C}^p de \mathbb{R}^2 , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^2)$ et f est une immersion.

[PS] p 372

Remarque: $\forall t \in I$, il existe J voisinage de t dans I tel que $f(J)$ est une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 . $f(I)$ n'est pas une sous-variété globale, mais si f est injective.

Exemple: f injectif et on a t pas une sous-variété.

Définition 16: deux arcs paramétrés de \mathbb{R}^2 (I, f) et (J, g) sont dits \mathcal{C}^p équivalents si ils sont de classe \mathcal{C}^p et il existe Θ en \mathcal{C}^p difféomorphe entre I et J tel que $f = g \circ \Theta$. Un arc géométrique de classe \mathcal{C}^p de \mathbb{R}^2 est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés.

Prop 17: si (I, f) est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 , la tangente à (I, f) en $t \in I$ est le sous-espace affine de dim 1: $\mathbb{R} f'(t) + f(t)$. Et espace ne dépend pas de la paramétrisation choisie et on peut donc l'étudier sur le arc géométrique.

[OG] p 377

Déf 18: On appelle paramétrisation par la longueur d'arc d'un arc géométrique C de \mathbb{R}^2 , toute paramétrisation $(I, f) \in \mathcal{C}$ telle que $\forall t \in I, \|f'(t)\| = 1$

[OG] p 323

Prop 19: Pour tout arc géométrique C , il existe des l.a. paramétrisations. Si (I, f) est un arc, elles sont de la forme $f(t+a)$ ou $f(-t+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple: pour le cercle, on a paramétrisation et

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

[06] Définition 20: La longueur de l'arc (I, f) de a à b avec $a, b \in I$ est $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Proposition 21: $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ est indépendante de la paramétrisation choisie.

Exemple: pour la paramétrisation usuelle de l'ellipse, la longueur est, avec $a > b$,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt \text{ avec } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

[06] Définition 22: Le vecteur tangent à un point m de la courbe est $\vec{t}(m) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ pour (t, f) une paramétrisation.

[06] Définition 23: $\kappa(t, f)$ est une l.a. paramétrisation, $\|f'(t)\|$ est appelé la courbure et est noté $\kappa(t)$.

Proposition 24: Si (t, g) est une paramétrisation quelconque alors la courbure est

$$\kappa(t) = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3} \text{ avec } \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$$

Exemple: Pour l'ellipse $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$, on a

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}$$

Si $a = b$, on retrouve la courbure du cercle $\kappa(t) = \frac{1}{a}$.

Def 24: Un point où la courbure est extrémale est appelé sommet.

Exercice (des quatre sommets) 25: Toute courbe convexe simple à au moins quatre sommets.

[06] Def 25: Si C est une courbe fermée simple, elle est la frontière d'un compact de \mathbb{R}^2 , donc on peut définir son aire comme l'aire de ce compact.

Exercice 26: pour toute courbe fermée simple C de classe \mathcal{C}^2 , la longueur de C est supérieure à $\sqrt{4\pi \text{aire}(C)}$. Le cas d'égalité n'est vérifié que pour un cercle.

Exemple: Avec l'ellipse, si $a > b$, $\left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt \right)^2 > \frac{\pi b}{4a}$

Exercice 27: Une sous-variété convexe de dimension 1 est soit différentiable à S^1 , soit à \mathbb{R} . (Adrien).

2) Sous-variétés de matrices

Proposition 28: Les matrices de rang déterminé $k \in]0, n[$ forment une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - (n-k)^2$.

Proposition 29: Tout d -ème sous-variété de dimension n est une sous-variété de dimension n . (Olivier)

Corollaire 30: $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2 . L'espace tangent à tout point est $M_n(\mathbb{R})$.

Définition 31: Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{L}_G = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\}$ l'algèbre de Lie associée à G .

Proposition 32: \mathcal{L}_G est une algèbre et un espace vectoriel.

OVP 2

Exercice 33: Pour sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$ (d'après de $M_n(\mathbb{R})$). (Linda Van Neumann)

Corollaire 34: $SL_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de \mathbb{R}^{n^2} .

Proposition 35: L'espace vectoriel tangent à G en I_n est \mathcal{L}_G .

Corollaire 36: Les espaces tangents à $SL_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ en I_n sont $\text{Trace}^{-1}(0)$, $\text{Skw}(\mathbb{R})$ et $\text{Skw}(\mathbb{R})$.

Proposition 37: G est discret si et seulement si $\mathcal{L}_G = \{0\}$.

[CL3] p 203

[ROU] p 286

[H2G2] p 268

[GT] p 81-84

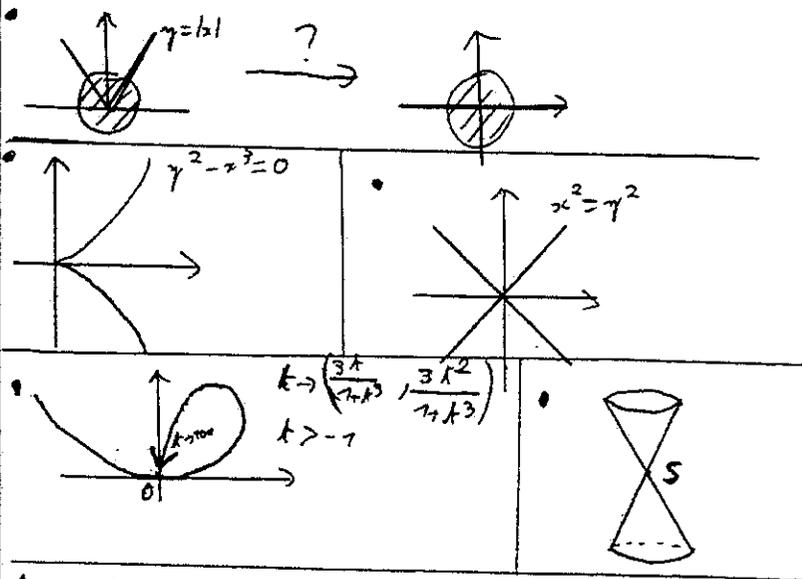
[MT] p 64-70

[GT] p 81-86

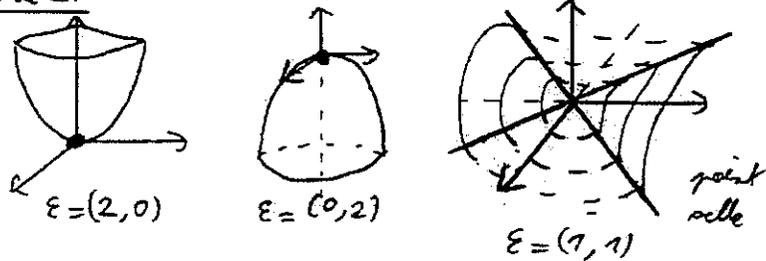
[CL3] p 197

[06] p 363

Année 1:



Année 2:



Références:

- [ROU]: Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
 - [LAFI]: Lafatais, Introduction aux variétés différentielles
 - [AVE]: Arvey, Calcul différentiel
 - [DAJ]: Dech, Malchaire, Paris, Objectif agrégation
 - [PG]: Berger, Gostiaux, Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces
(réf. sur les courbes, il y a aussi la Lippelle qui est plus accessible)
 - [CL3]: Charbit-Lou, Fermigier, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, analyse 3
 - [H2G2]: Caldero, Guenai, Histoire récente de groupes et de géométries
 - [GT]: Guenod, Tond, Théorie d'algèbre pour l'agrégation - Calcul différentiel
 - [MT]: Mœnne, Tardad, Introduction à la théorie des groupes de Lie classique
- réf. sur les variétés de matrices, le MTA et observatoire recellat.

Lemme de Morse

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, ex114 p354 + ex66 p209 (lemme)

Lemme (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)

Soit $A_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ tels que : $\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$ (càd toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente i.e. se ramène à celle-ci par changement de base)

Démonstration. • Soit $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{matrix}$, elle est polynomiale donc \mathcal{C}^1 .

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous multiplicative $\|\cdot\|$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|) = {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|)$.

D'où $D\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$.

On a de plus $H \in \text{Ker}(D\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Ker}(D\varphi(I_n)) = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.¹. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'inversion locale.

• On va restreindre φ sur un supplémentaire de son noyau et appliquer le théorème d'inversion.

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On pose donc $F = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on remarque $I_n \in F$.

Soit $\psi : F \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F . $D\psi(I_n)$ est injective par construction. Elle est même bijective car $\dim(F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F tel que ψ soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de U sur $V = \psi(U)$.

On peut de plus supposer $U \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, par continuité de \det , il existe un voisinage ouvert de I_n dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut alors restreindre notre \mathcal{C}^1 -difféomorphisme à $U \cap U'$ et son image sera $\psi(U \cap U')$, il reste alors un \mathcal{C}^1 -difféo.

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V, A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\rho = \psi^{-1}$. □

Remarque : pour $A_0 = I_n$, on a l'existence d'une racine carrée symétrique pour A proche de I_n .

Théorème (Lemme de Morse)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^3 sur U ouvert de \mathbb{R}^n tel que $0 \in U$.

On suppose que $Df(0) = 0$ (0 est un point critique), que $D^2f(0)$ est non dégénérée et que $\varepsilon(D^2f(0)) = (p, n-p)$.

Alors il existe φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0 .

$$f(x) - f(0) = Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x,x)dt = {}^t xQ(x)x \text{ avec } Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt.$$

Q est de classe \mathcal{C}^1 . De plus, $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ car non dégénérée.

On peut donc appliquer le lemme : il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$.

Or Q est continue, donc il existe un voisinage V_0 de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$. Ainsi, $\forall x \in V_0, Q(x) \in V$, donc $Q(x) = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$. On pose $M(x) = \rho(Q(x))$.

D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester appliquée à $Q(0)$ qui est aussi de signature $(p, n-p)$, $\exists A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$. Finalement $f(x) - f(0) = {}^t x {}^t M(x) {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A M(x) x$.

1. On peut montrer que cette application est aussi surjective.

En posant $\varphi(x) = AM(x)x$, on a $f(x) - f(0) = {}^t \varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$. Et donc avec $u = \varphi(x)$, on a bien $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \dots - u_n^2$.

Il reste à montrer que φ définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme entre deux voisinages de 0.

φ est \mathcal{C}^1 car M l'est (en effet, ρ est \mathcal{C}^1 et Q est supposé \mathcal{C}^1 car f est \mathcal{C}^3).

Calculons la différentielle à l'origine de $\varphi : \varphi(h) - \varphi(0) = AM(h)h = AM(0)h + o(\|h\|)$.

Comme $AM(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(0)$ est inversible.

D'après le théorème d'inversion locale appliqué à φ , il existe deux voisinages de 0 (en fait de 0 et de $\varphi(0) = 0$) tels que φ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme entre ces deux voisinages. \square

Remarque : • (Rouvière, ex 111) On se donne f de classe \mathcal{C}^3 et a un tel que $D^2f(a)$ soit **non dégénérée**. On pose $\delta(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)h$, alors par le lemme de Morse, $\delta(h) = \varepsilon_1 u_1^2(h) + \varepsilon_2 u_2^2(h)$ dans un voisinage de a , avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$.

$h \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(a) + Df(a)h$ est l'équation paramétrique du plan tangent, donc $\delta(h)$ représente la différence entre $f(h)$ et sa projection verticale sur le plan tangent.

On en déduit que si la signature est $(2, 0)$, alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ et f est au dessus de son plan tangent localement en a . Au contraire, si la hessienne est définie négative, f est localement au dessous de son plan tangent.

Si la signature est $(1, 1)$, $\delta(h) = u_1^2(h) - u_2^2(h)$ et donc f coupe son plan tangent en une courbe (qui n'est pas une variété) avec un point double définie par $u = \pm v$.²

- Si $D^2f(a)$ est dégénérée, on ne peut rien dire sans étudier les termes suivants dans le développement de Taylor.
- Pour aller plus vite, on note $V \in \mathcal{V}(A)$ pour dire V voisinage de A .

Adapté du travail de Laura Gay

2. C'est là un lien important entre cône isotrope et géométrie différentielle.

Théorème de Cartan - Von Neumann

Références : Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*, p 81-84

Théorème (Théorème de Cartan-Von Neumann)

Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$ (donc de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Démonstration. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Le but de la preuve est de trouver pour chaque point g de G un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local φ envoyant un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage ouvert V de g dans $GL_n(\mathbb{R})$ et un sous-espace vectoriel \mathcal{L}_G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = V \cap G$.

- On peut se restreindre au cas où $g = I_n$.

En effet, l'application $t_g : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ h & \longmapsto & gh \end{matrix}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme (global).

Si on trouve φ un difféomorphisme de $V(0) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $V(I_n) \subset G$, alors $t_g \circ \varphi$ est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de $g \in G$.

- On pose $\mathcal{L}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La seule chose non triviale à vérifier est la stabilité par la somme.

L'exponentielle est \mathcal{C}^∞ . De plus, $D \exp(0) = I_n$ est un isomorphisme, donc \exp induit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I_n . On appelle \log son inverse et on remarque que comme $\exp(H) = I_n + H + o(H)$ (par la définition de \exp par la série), on a nécessairement $\log(I_n + H) = H + o(H)$.¹

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = I_n + \frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$. Donc pour k assez grand, on peut utiliser la formule d'inversion précédente et écrire $e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = \exp\left(L\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)\right)$.

Il vient $\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k = \exp\left(kL\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)\right) = \exp\left(kL\left(I_n + \frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \exp\left(k\left(\frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \exp(A+B) + o(1)$.

Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = e^{(A+B)}$.

Soient maintenant A et B dans \mathcal{L}_G , alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA}, e^{tB} \in G$. On a alors $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}} = e^{t(A+B)}$. Or $\forall k, e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}} \in G$ et G est fermé, donc $e^{t(A+B)} \in G$. On en déduit donc que $A+B \in \mathcal{L}_G$.

→ On pose S un supplémentaire de \mathcal{L}_G dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis on pose φ qui à $X = L + M \in \mathcal{L}_G \oplus S$ associe $e^L e^M \in GL_n(\mathbb{R})$. φ est \mathcal{C}^∞ , $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi'(0) = I_n$. On peut appliquer le théorème d'inversion local.

Il existe U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert de I_n , $V = \varphi(U) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Néanmoins on veut avoir $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = V \cap G$. On sait déjà que $\varphi(\mathcal{L}_G) \subset G$, donc $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) \subset V \cap G$. On va donc montrer que quitte à restreindre U , si $\varphi(X) \in G$, alors $X \in \mathcal{L}_G$, ainsi le théorème sera prouvé!

- Montrons qu'il n'existe pas de suite $(M_k)_k$ de $S \setminus 0$ de limite nulle et telle que pour tout $k, e^{M_k} \in G$.

Si c'est le cas, on pose la suite $\varepsilon_k = \frac{M_k}{\|M_k\|}$. Elle évolue dans la boule unité fermée et dans S , donc quitte à extraire une sous suite, on peut supposer qu'elle converge (vers $\varepsilon \in S$ de norme 1). Montrons que $\varepsilon \in \mathcal{L}_G$. On aura alors $\varepsilon \in \mathcal{L}_G \cap S = \{0\}$, ce qui est absurde.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{t\varepsilon} = \lim_k \exp\left(t \frac{M_k}{\|M_k\|}\right)$. Si on pose $\frac{t}{\|M_k\|} = \lambda_k + \mu_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| < \frac{1}{2}$, on obtient $\exp\left(t \frac{M_k}{\|M_k\|}\right) = \underbrace{e^{\lambda_k M_k}}_{=(e^{M_k})^{\lambda_k} \in G} \underbrace{e^{\mu_k M_k}}_{\rightarrow 1}$.²

1. En fait, \log est le logarithme matriciel et on peut le définir directement par $\log(I_n + M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i M^{i+1}}{i+1}$ pour $\|M\| < 1$.

2. $\exp(\mu_k M_k)$ tend vers 1 puisque M_k tend vers 0 et μ_k borné.

On a donc $e^{t\epsilon} = \lim_k e^{\lambda_k M_k}$ et comme G est fermé, $e^{t\epsilon} \in G$.

• Conclusion : Supposons que l'on ne peut restreindre U tel que si $\varphi(X) \in G$ et $X \in U$, alors $X \in \mathcal{L}_G$. Alors il existe deux suites $(M_k)_k$ et $(L_k)_k$ de limite nulle telles que pour tout k , $M_k \neq 0$ et $\varphi(M_k + L_k) \in G$. Dans ce cas, $e^{M_k} = \varphi(M_k + L_k)e^{-L_k} \in G$ donc par le point précédent, on a une absurdité. Il existe donc un ouvert U contenant 0 tel que $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = \varphi(U) \cap G$ et tel que φ induise un C^1 -difféomorphisme sur U . \square

Remarques : • \mathcal{L}_G peut être égal à $\{0\}$. En fait, c'est le cas si et seulement si G est discret, donc si et seulement si G est une variété de dimension nulle (c'est à dire un ensemble de points isolés).

• L'ensemble \mathcal{L}_G est en fait une sous-algèbre pour la multiplication interne du crochet de Lie (même démo que pour la stabilité par la somme). On l'appelle l'algèbre de Lie associée à G .

• La courbe $t \rightarrow \exp(tM)$ pour $M \in \mathcal{L}_G$ est une courbe dans G passant par I_n . Son vecteur tangent en $t = 0$ est M . Donc $\mathcal{L}_G \subset T_{I_n}G$. Or ils ont même dimension, donc l'espace tangent à I_n est l'algèbre de Lie.

• Applications (Mneimné-Testard) : $SL_n, SO_n/O_n$ sont des sous-variétés de \mathbb{R}^{n^2} , les algèbres de Lie correspondantes sont les matrices de trace nulle et les matrices antisymétriques. Les dimensions de ces sous-variétés sont donc $n^2 - 1$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. Les comportements de SO_n et O_n sont les mêmes car SO_n est un ouvert de O_n .

• C'est un développement dangereux... Il faut connaître un minimum de théorie de Lie pour le faire.