218 - Applications des formules de Taylor

0) Théorie

E, F evn de dim finie
U ouvert de E

1/ Préliminaires

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et si $[a,a+h] \subseteq U$ alors :
$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 Df(a+th).h \, dt.$$

Théorème des accroissements finis $a<b \in \mathbb{R}$

Soient $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et différentiables sur $]a,b[$. Si $\|f'\| \leq g'$ sur $]a,b[$

alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

2/ Formules de Taylor

Notation : Pour $f : U \to F$ et $a \in U$ on note :
$$R_n^a(h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a).\underbrace{(h,h,\dots h)}_{k \text{ fois}}$$
quand cela a un sens.

Rq : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est polynomiale ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_n^a(h) = 0 \ \forall a, \forall h$.

Taylor-Young Si f est n fois différentiable en a,

alors $R_n^a(h) = o(\|h\|^n)$

Taylor-Lagrange Si f est $n+1$ fois diff sur U

et $[a,a+h] \subseteq U$ alors $\|R_n^a(h)\| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,a+h]} \|D^{n+1} f\|$.

Taylor-Reste intégral Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur U,

alors $R_n^a(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th).(h,\dots h) \, dt$.

3/ Cas réel

Taylor-Lagrange (égalité) Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ est dérivable sur $]a,b[$.

Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $R_n^a(b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

I) Applications en analyse

1/ Résultats issus des formules de Taylor

Inégalité de Kolmogorov $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $M_k = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(k)}|$

Si M_0 et M_n sont finis alors

- $\forall k \leq n$, M_k est fini
- $M_1 \leq \sqrt{M_0 M_2}$
- $\forall k \leq n$, $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$

$\boxed{\text{Dv 1}}$

Lemme de Bernstein $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur I alors la série de Taylor de f converge uniformément sur tout compact de $\mathring{I}$ vers f.

Prop : $f \in \mathcal{C}^\infty(I,F)$

Tout zéro d'ordre fini de f est isolé.

Théorème de Darboux : La dérivée d'une fonction dérivable réelle possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Prop : $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré impair, $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Si $|f^{(n)}|\le|P|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ alors f est nulle.

Cex : $\sin x$ et x^2+1

2/ Développements limités

On dit que f admet un DL à l'ordre n en 0 si f s'écrit : $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o(x^n)$.

Si c'est le cas, le DL est alors unique.

La formule de Taylor-Young implique l'existence d'un DL à l'ordre n pour une fonction n fois dérivable.

Exs : $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Prop : Si f admet un DL en 0 à l'ordre $n\geq 1$ alors f est dérivable en 0.

⚠ Ce n'est pas vrai à l'ordre supérieur :
$f(x) = 1+x+x^2+x^3\sin 1/x^2$, $f(0)=1$
$f(x)=1+x+x^2+o(x^2)$ mais n'est pas dérivable en 0.

3/ Formule d'Euler MacLaurin

Les polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n\geq 0}$ sont définis par :

$$\frac{z e^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n \quad , \quad b_n = B_n(0)$$

Thm : $m<n\in\mathbb{Z}$, $f:[m,n]\to\mathbb{C}$ $\mathcal{C}^r$ $(r\geq 1)$. On a :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{r}\frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(m)\right) + R$$

avec $R = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n B_r(\{t\})f^{(r)}(t)\,dt$

Applications : * Développement asymptotique de H_n

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r-1}\frac{(-1)^{k+1}b_k}{k!}\frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

* Formule de Stirling précisée

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \sum_{k=1}^{r}\frac{b_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2r+1}}\right)$$

* Prolongement de ζ à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

II Applications en analyse numérique

Prop : Si $f\in\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$.

1/ Méthode de Newton

On cherche à approcher le zéro de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Si f est $\mathcal{C}^2$, $f(a)<0<f(b)$ et $f'>0$ sur $[a,b]$.
Alors pour x_0 suffisament proche du zéro de f, la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers le zéro avec une vitesse quadratique.

Ex : Méthode de Héron

$x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ $\quad (f(x) = x^2 - 2)$

Alors $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq |x_n - \sqrt{2}|^2$ d'où $x_{10} \simeq \sqrt{2}$ à 10^{-308} près !

2/ Approximations d'intégrales

On dit qu'une méthode de calcul approché d'intégrales est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré $\leq n$.

Méthodes composées On cherche $\int_a^b f$ avec $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On subdivise $[a,b]$: $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. Puis on approche $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$ par $\int_{a_i}^{a_{i+1}}$ polynôme approchant f sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Méthode	Polynôme approchant f sur $[a_i, a_{i+1}]$	$S_n(f)$	ordre	Majorant de $\lvert S_n(f) - \int_a^b f \rvert$	
Rectangles à gauche	$f(a_i)$	$\sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$	0	$\frac{h(b-a)}{2} M_1$	$f\ \mathcal{C}^1$
Point milieu	$f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$	1	$\frac{h^2(b-a)}{24} M_2$	$f\ \mathcal{C}^2$
Trapèzes	$\frac{(x - a_i)}{(a_{i+1} - a_i)} f(a_{i+1}) + \frac{(x - a_{i+1})}{(a_i - a_{i+1})} f(a_i)$	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$	1	$\frac{h^2(b-a)}{12} M_2$	$f\ \mathcal{C}^2$
Simpson	polynôme d'interpolation de Lagrange en a_i, $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ et a_{i+1}	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + 4f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + f(a_{i+1})}{6}$	3	$\frac{h^4(b-a)}{2880} M_4$	$f\ \mathcal{C}^4$

où $h = \max(a_{i+1} - a_i)$

Méthode de Gauss

On cherche à approximer $\int_a^b f(x) w(x) dx$ par $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(x_i)$

($w > 0$ telle que $\int_a^b |x^n w(x)| dx < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Thm : Il existe un ~~seul~~ un seul choix des x_i et des λ_i tel que la méthode soit d'ordre $2\ell + 1$. Les x_i sont les racines du $(\ell+1)$-ème polynôme orthogonal associé à w.

III Applications en géométrie

1/ Quadriques et extrema

$f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$

Prop : Si f admet un min local en a et si f est diff en a. Alors $Df(a) = 0$.

Prop : Si f est 2 fois diff en a et si $Df(a) = 0$.

* a min local $\Rightarrow$ $D^2 f(a)$ positive
* $D^2 f(a)$ définie positive $\Rightarrow$ a min local

Ex : $f(x,y) = x^2 - y^3$ $\to$ pas de min local en 0, $Df(0) = 0$, $D^2 f(0) \geq 0$

$g(x,y) = x^2 + y^4$ $\to$ min local en 0, $D^2 f \not> 0$

Rq : se généralise à l'ordre p.

Quadriques $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 2 fois diff en a de Hessienne $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

* si $rt - s^2 > 0$, f a un extrema local en a point critique (un min si $r > 0$)
* si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum local en a
* si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

2/ Courbes et surfaces

* $f : I \to \mathbb{R}^2$ courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^n$

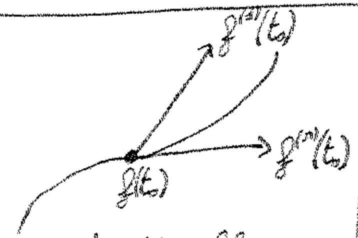
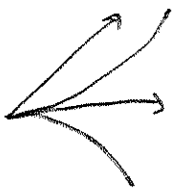
La 1ère dérivée non nulle $f^{(p)}(t_0)$ et la 1ère dérivée non colinéaire à celle-ci $f^{(q)}(t_0)$ donnent l'aspect local de la courbe. cf Annexe

* $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$

$f(x,y) = a + bx + cy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2)$

Le plan tangent en O est $a + bx + cy = 0$. La position relative est donnée par l'étude de $Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$.

Annexe

$p \backslash q$	impair	pair
impair	 point d'inflexion	 la courbe ne coupe pas sa tangente
pair	 point de rebroussement de 1ère espèce	 point de rebroussement de 2° espèce

Fin du plan

- si Q définie → point elliptique
- si Q non dégénérée mais non définie → point hyperbolique
- si Q dégénérée mais non nulle → point parabolique

__Lemme de Morse__ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0, $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$.
Si $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$.
Alors $\exists \varphi : x \mapsto u$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2.$$

$\boxed{\text{Dv2}}$

Références

0 → Cartan - Cours de calcul différentiel
0.3 → Gourdon Analyse p 73
I.1 Bernstein → ZQ p 296
Zéro d'ordre fini → Pommellet p 105
Darboux → Gourdon ou XENS Analyse 1 p 238
Dérivées bornées → XENS 1 p 251

I.2 → Gourdon
I.3 → Gourdon p301, Demailly p83
II. $f''(x)$ → Pommellet ?
II.1 → Rouvière p 152
II.2 → Demailly
III.1 → Objectif Agreg p 17
Gostiaux T3 p344

III.2 → Audin
Laville - Courbes et surfaces

On n'en a pas parlé parce qu'on n'y comprend rien :
- schémas de résolution numérique d'EDO
- TCL
- méthode de Laplace / de la phase stationnaire / du col