218 Applications des formules de Taylor.

I Cas des fonctions d'une variable réelle

$n\in\mathbb{N}$, I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$

1) la formule de Taylor Young

<u>th1</u> : $f : I\to\mathbb{R}$, C^n sur I, $a\in I$ tq $f^{(n+1)}(a)$ existe
Alors $f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+o(h^{n+1})$

<u>rem2</u> : on ne peut pas dire d'emblée que la série converge ni que si elle converge la fonction est égale à la somme de cette série.

<u>ex3</u> : • $\begin{cases} e^{-1/x^2} & x>0 \\ 0 & \text{si } x\le 0\end{cases}$ ne coïncide pas avec sa série de Taylor sauf en 0.

• $f(x)=\sum_{n\geq 0}e^{-n}e^{in^2x}$ est dérivable en tout ordre mais sa série de Taylor diverge.

<u>app4</u> : permet d'obtenir les développements limités usuels :

<u>ex5</u> : $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$

<u>app6</u> : permet de calculer certaines limites

<u>ex7</u> : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}=-2$

<u>app8</u> : Soit $f\in C^\infty(I,\mathbb{R})$ et $\alpha\in I$ un zéro de f d'ordre fini. Alors α est un point isolé. Ainsi si f possède une infinité de zéros dans $[a,b]\subset I$, il existe au moins un zéro d'ordre infini.

<u>app9</u> : permet d'établir la nature de certaines séries numériques.

<u>ex10</u> : $\sum_{n\geq 0}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge

<u>app11</u> : <u>th de Darboux</u> : $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

<u>app12</u> : étude affine locale d'une courbe plane. $\gamma : I\to\mathbb{R}$ C^∞ arc paramétré du plan $t\in\mathring{I}$
$p=\min\{n,\ \frac{\gamma^{(n)}(t)}{n!}\neq\vec{0}\}$ q le plus petit entier $>p$ tq $\left(\frac{\gamma^{(q)}(t)}{q!},\frac{\gamma^{(p)}(t)}{p!}\right)$ libre. Alors $\vec{v}=\frac{\gamma^{(p)}(t)}{p!}$, $\vec{w}=\frac{\gamma^{(q)}(t)}{q!}$

p impair q pair : point ordinaire p,q impairs inflexion
q impair p pair : rebroussement 1e espèce p,q pairs : rebroussement 2e espèce.
(fig 1)

<u>app13</u> : th Central-limite $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ espace probabilisé (X_n) va réelles IID admettant un moment d'ordre 2. $m=\mathbb{E}[X_1]$ $\sigma^2=Var(X_1)$
Alors $\frac{X_1+\dots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{loi}\mathcal{N}(0,1)$

<u>ex14</u> : $X_i\sim\mathcal{B}(1,p)$ $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(a\le\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\right)=$
$=\int_a^b\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt$ formule de Moivre-Laplace.

2) la formule de Taylor Lagrange

<u>th 15</u> : $f : [a,b]\to\mathbb{R}$, C^n, $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$
Alors $\exists c\in\,]a,b[$, $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

<u>rem 16</u> : $n=0$ c'est la formule des accroissements finis.

<u>app17</u> : permet d'obtenir des encadrements.

<u>ex 18</u> : $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ $\forall x\geq 0$

<u>app19</u> : permet de calculer certaines limites

<u>ex20</u> : • $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$

• soit $f\in C([0,1],\mathbb{R}^{*+})$ Alors
$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^1 f(t)^x dt\right)^{1/x}=\exp\int_0^1\ln(f(t))dt$

drop 1

app 21 : méthode de Newton $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2 $c<d$ $f(a)=0$
$f(c) < 0 < f(d)$, $f'(x) > 0$ sur $[c,d]$, $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Alors : - (x_n) cv d'ordre 2 vers a
- si de plus $f'' > 0$ sur $[c,d]$ Alors (x_n) ↓↓ ou cons-tante et $x_{n+1} - a \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

ex 22 : $f(x) = x^2 - y$ on obtient une valeur approchée de $\sqrt{y}$.

rem 24 : si on ne sait pas calculer f' on peut aussi faire la méthode des sécantes, mais on a besoin de 2 points initiaux.

app 25 : inégalités de Kolmogorov $n \geq 2$ f $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$p \in [\![0,n]\!]$, $M_p = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(p)}(t)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $M_0, M_n \in \mathbb{R}^+$
Alors : • $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $M_p \in \mathbb{R}^+$
• $\forall m \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![0,m]\!]$, $M_k \leq 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}}$

3) formule de Taylor avec reste intégral

th 26 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^{n+1} Alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

app 27 : permet d'établir la nature de certaines séries.

ex 28 : $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge

app 29 : e n'est pas quadratique.

rem 30 : on peut obtenir ce résultat par Taylor Lagrange

app 31 : th de Bernstein pour les séries entières : $a > 0$
$f \in C^\infty(]-a,a[, \mathbb{R})$ tq $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[$ $f^{(2p)}(x) \geq 0$ Alors f développable en série entière sur $]-a,a[$.

app 32 : évaluation de l'erreur en intégration numérique : w continue >0 sur $]\alpha,\beta[$ tq $\int_\alpha^\beta w(x)\,dx$ converge. méthode d'ordre $N > 0$ $f \in C^{N+1}([\alpha,\beta])$
$$E(f) = \int_\alpha^\beta f(x) w(x)\,dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$
Alors $E(f) = \frac{1}{N!} \int_\alpha^\beta K_N(t) f^{(N+1)}(t)\,dt$
$K_N(t) = E(x \mapsto (x-t)_+^N)$ $t \in [\alpha,\beta]$ noyau de Peano

ex 33 : méthode du point milieu d'ordre 1
f C^2 $K_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-t)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(1+t)^2 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ $|E_1(f)| \leq \frac{1}{3} \|f''\|_\infty$.

II Cas des fonctions de plusieurs variables réelles

$n, p \geq 1$ $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide $f : U \to \mathbb{R}^p$ C^2
$a \in U$ $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

1) les formules

th 34 : formule de Taylor avec reste intégral.
on suppose $[a, a+h] \subset U$
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \int_0^1 (1-t)\, d^2f_{a+th}(h,h)\,dt$$

th 35 : formule de Taylor-Young $[a,a+h] \subset U$
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

rem 36 : on peut se ramener au cadre d'une fonction d'une variable réelle en considérant $t \mapsto f(a+th)$

rem 37 : la formule de Taylor-Lagrange existe pour les fonctions à valeurs réelles seulement.

2) applications

app 38 : recherche des extrema des fonctions à valeurs réelles : soit $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ $a \in U$ $df_a = 0$
Q la forme quadratique associée d^2f_a

• si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a alors φ est définie positive (resp. définie négative)
• φ définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

ex 39 : pour les fonctions convexes
$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ A symétrique positive ou négative.

app40 : lemme d'Hadamard
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et $df_0 = 0$ Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ $f(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j \varphi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ où
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_{i,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

rem41 : • pour la dimension 1 ceci signifie que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ $f(0)=0$ se factorise sous la forme $x g(x)$ où $g \in C^\infty$.
• on peut poursuivre le raisonnement aux ordres supérieurs : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f^{(i)}(0) = 0$ $0 \le i \le k$ Alors $\exists g \in C^\infty$ tq $f(x) = x^k g(x)$.

app42 : méthode de Newton Raphson : f $C^2(O, \mathbb{R}^n)$
$f(a) = 0$, $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ inversible. Alors a est un point fixe superattractif de φ
(extension de la méthode de Newton).

ex 43 : $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ xe^x + ye^y = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2,126932304 \\ 0,206278156 \end{pmatrix}$ $p=4$

app 44 : lemme de Morse : $U \ni 0$ ouvert de $\mathbb{R}^n$
$f : U \to \mathbb{R}$ C^3. $Df_0 = 0$ D^2f_0 non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors $\exists$ C^1-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$
et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$.

ex 45 : $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} = 0$
projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents (fig 3)

Rouvière ??

app46 : étude affine locale d'une surface S d'équation $z = f(x,y)$ f C^3 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$. D^2f_a non dégénérée on peut discuter la position relative de S par rapport à son plan tangent en $(a, f(a))$ (fig 2)

app47 : $\Gamma : s \mapsto M(s)$ courbe dans $\mathbb{R}^3$ C^3
s abscisse curviligne $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ trièdre de Frenet au point $M(s)$ Alors

$$\overrightarrow{M(s)M(s+h)} = X(s)\vec{T} + Y(s)\vec{N} + Z(s)\vec{B}$$

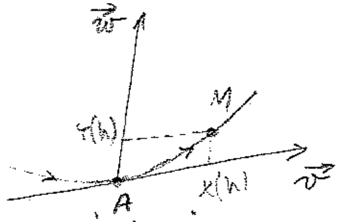
avec
$$X(s) = h - \frac{1}{6R(s)^2} h^3 + o(h^3)$$
$$Y(s) = \frac{1}{2R(s)} h^2 - \frac{R'(s)}{6R(s)} h^3 + o(h^3)$$
$$Z(s) = \frac{1}{6R(s)T(s)} h^3 + o(h^3)$$

$\frac{1}{R(s)}$ courbure $\frac{1}{T(s)}$ torsion au point $M(s)$.

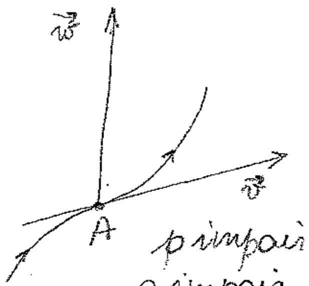
références : Demailly, Gourdon Analyse, Rouvière
Barbe-Ledoux, Objectif Agrégation, Madère
Nourdin.

dvp2

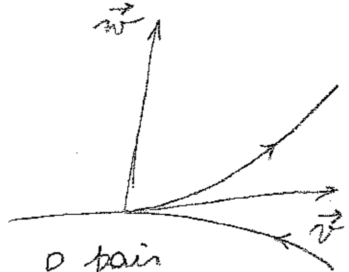
fig 1 :



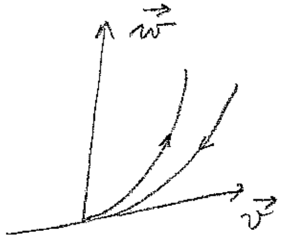
p impair
q pair
point ordinaire



p impair
q impair
point d'inflexion

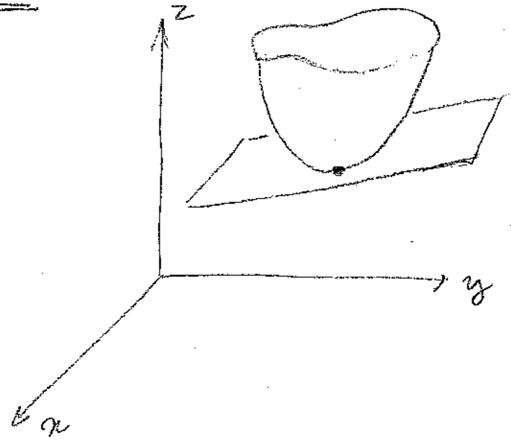


p pair
q impair
rebroussement de 1e espèce

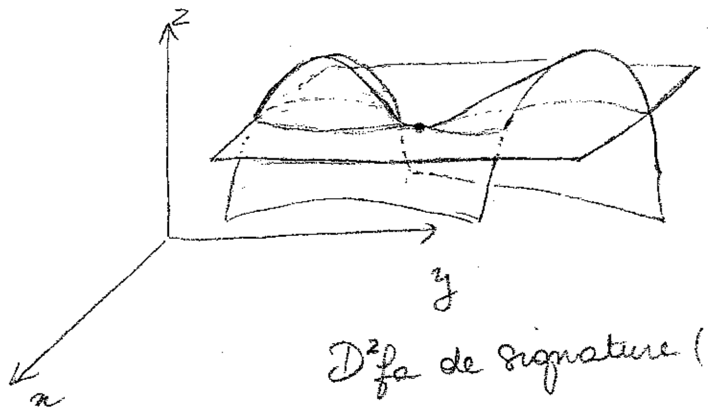


p pair
q pair
rebroussement de 2e espèce.

fig 2 :

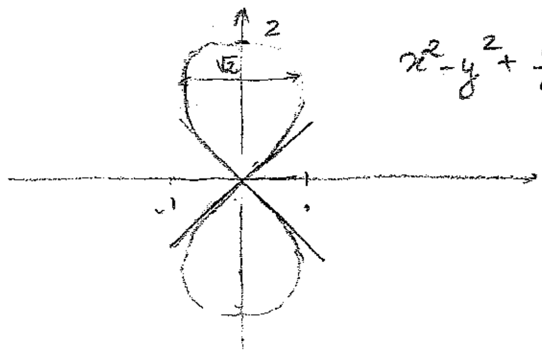


$z = f(x,y)$
et plan tangent
$D^2 f_a$ de signature (+,+)



$D^2 f_a$ de signature (+,−)

fig 3



$x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} = 0$