Mathias / Gurvan

218 Applications des formules de Taylor

0 Préliminaires

1 Une base des polynômes

Soit $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, on considère $B_N = \left\{ P_i = \frac{(X-a)^i}{i!}, 0 \leq i \leq N \right\}$ une base de $\mathbb{R}^N[X]$ et $B_N^* = \left\{ \varphi_i = P \mapsto P^{(i)}(a) \right\}$ sa base duale.

On a, $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $P = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(P) P_i = \sum_{i=0}^{N} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!}$

Soit I un interval de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ N fois dérivable en a :

$P_N^a(f) = x \mapsto \sum_{i=0}^{N} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$ la projection de f sur B_N

$R_N^a(f) = f - P_N^a(f)$ le "reste", aussi noté $R_N^f(a,x)$

Prop 0.1. f est polynomiale ssi $\exists n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} / R_n^a(f) = 0$

Prop 0.2 : a est racine de $P \in \mathbb{R}_N[X]$ d'ordre p ssi $\forall 0 \leq k \leq p-1$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(p)}(a) \neq 0$

2 Formules de Taylor sur $\mathbb{R}$

Th 0.1 [Taylor-Young] Soit I un interval de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en $a \in \mathring{I}$,

alors $R_n^f(a,h) = o(h)$

Th 0.2 [Taylor Lagrange]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $R_n^f(a, b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Rq 0.1 : Pour $n=0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis : $\exists c \in]a,b[$ tq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Th 0.3 [Inégalité de Taylor-Lagrange]
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^n$ tq $f^{(n)}$ est dérivable, alors $\forall x \in]a,b[$, $\forall h / x+h \in]a,b[$, $|R_n^f(x,h)| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{]a,b[} |f^{(n+1)}|$

Th 0.4 [Taylor – Reste intégral]
Soient I un interval ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ alors $\forall x \in I$, $\forall h$ tq $x+h \in I$, $R_n^f(x,h) = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

Rq 0.2 : Pour $n=0$, on retrouve le th fondamental de l'analyse : $f(a) - f(a+h) = \int_a^{a+h} f'(t)\,dt$

Rq 0.3 : Les théorèmes 0.1, 0.2 et 0.3 se généralisent pour $f : \mathbb{R}^d \to E$, $(E, \|\cdot\|)$ evn de dim finie

I Applications en analyse

1 Développements limités

Prop 1.1 $f : I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n en $x_0 \in I$ si $\exists a_0, \dots, a_n$ tq $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$

Les $(a_i)_i$ sont alors uniques

Prop 1.2 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en x_0, alors elle admet un DL en x_0 à l'ordre n. On connait de plus une expression pour les $(a_i)_i$

Ex 1.1 : $\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)$

2 Séries entières

Prop 1.3 Si f est développable en série entière en 0, ~~alors~~ alors la série entière de f est sa série de Taylor en 0.

Ex 1.2 : la solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est a série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$

DVP 1

Th 1.1 [Bernstein] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[, \mathbb{R})$

Si $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[, \ f^{(2k)}(x) \geq 0$,

alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$

Ex 1.2 : le rayon de convergence de $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$

Ex 1.3 : $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0

3) Lemme de Morse

Prop 1.3 [Lemme d'Hadamard]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; Si $f(0) = 0$, alors $\exists g_1, \dots g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq

$\forall x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \dots x_n)$

Prop 1.4 (Application)

Le noyau du morphisme d'algèbres

$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array}$ est un idéal principal

DVP 2

Th 1.2 [Lemme de Morse] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ tq $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$ inversible

Alors $\exists \varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n)$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $W \ni 0 \to V \ni 0$ tq

$f(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_r(x)^2 - \varphi_{r+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$

II Applications en analyse numérique

1 Méthode de Newton

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$. si $\exists x_* \in [a,b]$ tq $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{cases}$ alors, pour x assez proche de x_*,

la suite $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ cvg vers x_* à vitesse quadratique

Prop 2.1 (Application) Calcul effectif de racines

Ex 2.1 Appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, la méthode de Newton permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$

2 Intégration numérique

Pour $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ et $a = a_0 < \dots < a_n = b$ une subdivision, on cherche à approcher $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ par un terme de la forme $C_i = \sum_{j \in J} \omega_{ij} f(x_{ij})$, $x_{ij} \in [a_i, a_{i+1}]$, $\sum_{j\in J} \omega_{ij} = 1$, J fini

Ce terme correspond dans certains cas à l'intégration d'une interpolation polynomiale de f en les $(x_{ij})_j$

<u>Définition</u> : on dit qu'une méthode est d'ordre N si elle est exacte pour les polynômes d'ordre $\leq N$

On appelle $E(f) = \int_a^b f - \sum_i (a_{i+1} - a_i) \sum_j \omega_{ij} f(x_{ij})$ l'erreur d'approximation

<u>Th 2.1 [Peano]</u> Si $f \in \mathcal{C}^{N+1}([a,b], \mathbb{R})$ est approximée par une méthode d'ordre N, alors

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)\,dt$$

avec $K_N(t) : \begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto E(x \mapsto (x-t)_+^N)\end{array}$

Méthode	Condition	Points d'interpolation de $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$	Ordre	$\sim E(f)$
Rectangles (gauche)	$f\ \mathcal{C}^1$	a_i	0	$(b-a)h \|f'\|_\infty$
Trapèzes	$f\ \mathcal{C}^2$	$a_i,\ a_{i+1}$	1	$(b-a)h^2 \|f''\|_\infty$
Simpson	$f\ \mathcal{C}^4$	$a_i,\ \frac{a_i + a_{i+1}}{2},\ a_{i+1}$	3	$(b-a)h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

III. Applications en géométrie

<u>Th 3.1 [Taylor-Young]</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to E$ $(E, \|.\|)$ evn de dim finie

Si f est n fois diff. en $x \in U$, alors

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(x).(h)^k + o(\|h\|^n)$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$

<u>Prop 3.1</u> : Si f admet un min local en a et f diff. en a, alors $Df(a) = 0$

<u>Th 3.2</u> : Si f deux fois diff en a et $Df(a) = 0$,

(i) a min local $\Rightarrow D^2 f(a)$ positive

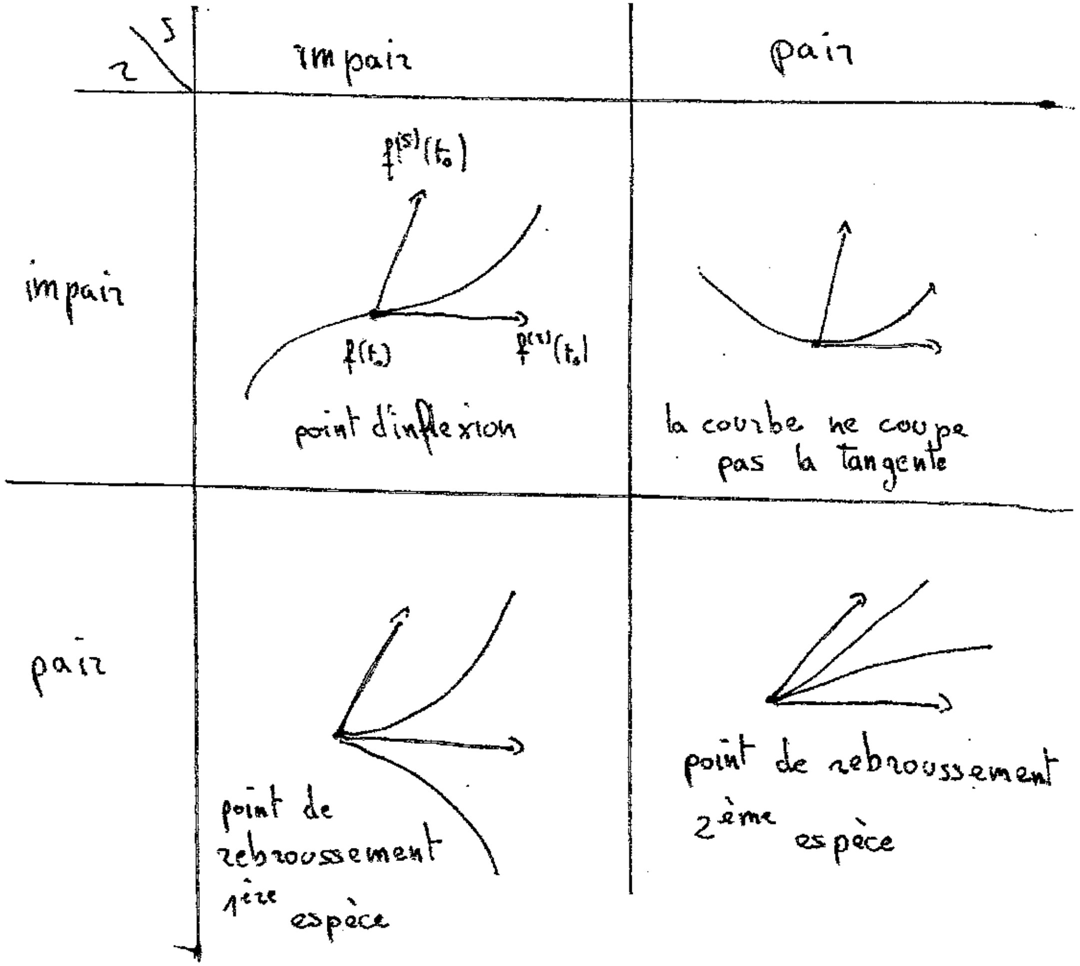
(ii) $D^2 f(a)$ définie positive $\Rightarrow a$ est un min local

<u>Ex 3.1</u> : $f(x,y) = x^2 - y^3 \to$ pas de min local en O, $Df(0) = 0$,
$g(x,y) = x^2 + y^4 \to$ min local en O, $D^2 f(0) \not> 0$

<u>Rq 3.1</u> Donne la position de f par rapport au plan tangent en tout point

<u>Th 3.2</u> : $f : I \to \mathbb{R}^2$ courbe paramétrée $\mathcal{C}^\infty$, $t_0 \in I$

La 1ère dérivée non nulle $f^{(r)}(t_0)$ et la 1ère dérivée non colinéaire à celle-ci $f^{(s)}(t_0)$ donnent l'aspect local de la courbe (cf Annexe)



On n'a pas parlé de

- Inégalités de Kolmogorov (analyse)
- Méthode de Laplace (Integ. num)
- Formule d'Euler - Maclaurin (—)
- Théorème central-limite (probas)

Références

- Analyse num : Demailly
- Geométrie/calcul diff : Cartan, Rouvière
- Divers : Gourdon (Analyse), Obj. agreg

Autres devs "classiques" :

- Méthode de Newton
- Inégs de Kolmogorov

Théorème de Bernstein sur les Série entière.

Thm : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞

Si $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a;a[\quad f^{(2k)}(x) \geq 0$

Alors f est développable en série entière sur $]-a;a[$.

Preuve:

Soit $b \in]0,a[$ montrons que f est développable en série entière sur $]-b;b[$.

Considérons $F(x) := f(x) + f(-x) \quad \forall x \in]-b;b[$.

$\forall k \in \mathbb{N} \quad F^{(2k+1)}(0) = 0$

Appliquons la formule Taylor-intégral: $F(x) = F(0) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0) + R_n(x)$. $\forall x \in]-b;b[$

où $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\,dt$.

$\forall k \in \mathbb{N} \quad F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$ donc $0 \leq R_n(b) \leq F(b)$.

Montrons que $R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall x \in [0,b[$:

$$0 \leq R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(b-t)^{2n+1}} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\,dt$$

$$\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\,dt$$ car $t \mapsto \frac{x-t}{b-t}$ est décroissante.

$$\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b)$$

$$\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\forall x \in [0,b[\quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$.

F étant paire $\forall x \in]-b,b[\quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$

Il reste à montrer le résultat pour f :

$$\forall x \in]-b, b[\qquad f(x) = f(0) + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(0) + r_n(x)$$

$$\text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\, dt$$

or $0 \leqslant f^{(2n+2)}(t) \leqslant f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) \qquad \forall t \in]-b; b[.$

$\leqslant F^{(2n+2)}(t)$

donc $|r_n(x)| \leqslant R_n(|x|) \qquad \forall x \in]-b; b[.$

et donc $r_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

notons $S_p(x) := \sum_{k=0}^{p} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) \qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]-b, b[.$

on a vu $S_{2n+1}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \qquad (*)$

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$$

or. $\frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$ est le terme général de la série convergente $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$.

donc $S_{2n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ d'après $(*)$

ainsi $S_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

b étant quelconque dans $]-a, a[$:

$$\forall x \in]-a; a[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Lemme de Morse

Lemme: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

- $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$
- $df_{0_{\mathbb{R}^n}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$
- $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.

Alors il existe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme définie sur W, un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$, et r un entier tels que:

$$f(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_r(x)^2 - \varphi_{r+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2.$$

Preuve: Montrons que f s'écrit $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ avec les fonctions h_{ij} $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral pour f:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \qquad \text{avec} \qquad g_i(x) = \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En appliquant le même résultat à chaque g_i on obtient:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x) \qquad \text{avec } h_{ij} \ \mathcal{C}^\infty \text{ pour tout } (i,j).$$

Posons $a_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. a_{ij} est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout couple (i,j).

et $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

De plus $A(x) := (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = {}^tX A(x) X$ où on note X le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$A(0) = \frac{1}{2} H = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ car en dérivant f par rapport à x_i et x_j, les seuls deux termes n'ayant pas de facteurs de la forme x_k $k \in [\![1,n]\!]$ seront $a_{ij}(x)$ et $a_{ji}(x)$.

$A := A(0)$ est donc inversible symétrique, notons $(r, n-r)$ sa signature :

$$A = {}^tP D P \quad \text{avec} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-r})$$

Notons $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel $\{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tUD = DU\}$
et φ l'application de $\Omega = \mathcal{F} \cap GL_n(\mathbb{R})$ dans S, l'ensemble des matrices symétriques :

$$\varphi : \Omega \longrightarrow S, \quad U \longmapsto {}^tUDU.$$

φ est $\mathcal{C}^\infty$ car les coefficients de $\varphi(U)$ sont des polynômes en les coefficients de U, mais φ n'est pas inversible $(\varphi(I_n) = \varphi(-I_n) = D)$.

Mais, pour tout $\varepsilon \in \mathcal{F}$, si $I_n + \varepsilon \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + \varepsilon) - \varphi(I_n) &= \underbrace{{}^t\varepsilon D + D\varepsilon} + {}^t\varepsilon D \varepsilon \\ &= d\varphi_{I_n} \cdot \varepsilon + o(\|\varepsilon\|) \end{aligned}$$

$d\varphi_{I_n}$ est injectif : si $d\varphi_{I_n} \cdot \varepsilon = 0$ alors $0 = {}^t\varepsilon D + D\varepsilon = 2D\varepsilon$ et donc $\varepsilon = 0$.
$d\varphi_{I_n}$ est surjectif : $\forall S \in S$, $\varepsilon := \frac{1}{2} D^{-1} S \in \mathcal{F}$ et $d\varphi_{I_n} \cdot \varepsilon = S$.

Ω étant un ouvert de $\mathcal{F}$, le théorème d'inversion locale assure qu'il existe un voisinage $\tilde{W}$, de I_n, dans Ω et un voisinage V, de D, dans S tels que $\varphi_{|\tilde{W}}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\tilde{W}$ sur $\varphi(\tilde{W})$. Notons h l'inverse de $\varphi_{|\tilde{W}}$.

$$\forall B \in V \quad B = \varphi_{|\tilde{W}}(h(B)) = {}^t(h(B))\, D\, (h(B)).$$

$x \mapsto A(x)$ étant continue, il existe un voisinage W de $0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $A(W) \subset V$

$$\forall x \in W, \quad A(x) \in V \quad A(x) = {}^t(h(A(x)))\, D\, (h(A(x))).$$

donc $\forall x \in W$, $f(x) = {}^tx A(x) x = {}^t(\psi(x))\, D\, \psi(x)$, où $\psi(x) = h(A(x)).x$. $\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$

De la forme de D, on trouve :

$$f(x) = \psi_1(x)^2 + \dots + \psi_r(x)^2 - \psi_{r+1}(x)^2 - \dots - \psi_n(x)^2$$

Il reste à montrer que ψ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de W sur $\psi(W)$.

$$\varphi(x) = h(A(0)).X + \big(h(A(x)) - h(A(0))\big).X$$

$h(A(x)) - h(A(0)) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par continuité de h et A.

donc $\big(h(A(x)) - h(A(0))\big).X = o(\|X\|)$

et donc $d\varphi_0 = h(A(0)) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, d'après le TIL, quitte à réduire W, φ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.