218

Applications des formules de Taylor

I Application en analyse

1) Formules en dimension 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$, I intervalle réel.

Thm 1 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors $\forall (a,x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Application 2 : Soit $x \in [-\pi, \pi]$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$? $x \in [0, \pi]$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin t \, dt$$ positif ?

Donc $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ Encadrement par des polynômes

Thm 3 : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors $\forall (a,b) \in I^2$ avec $a < b$, en posant M_{n+1} un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(b-a)^k f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Application 4 : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O_0(x^4)$

Thm 5 : Formule de Taylor-Young

Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors $\forall a \in I$, $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)$$

Application 6 : $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcul de DL.

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Rque 7 : On peut être tenté d'écrire, pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$: $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, mais cette série peut avoir un rayon de convergence nul.

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le théorème de Borel nous assure l'existence d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, telle que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Si $a_n = (n!)^2$, le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 est alors nul.

2) Application à l'approximation de la solution de $f(x) = 0$

Thm 8 : Méthodes de Newton

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ tq : $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$.

On pose : $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \geq 0$, avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Soit a tel que $f(a) = 0$

1) $\exists \alpha > 0$, $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $x_n \to a$ avec une vitesse quadratique.

2) Si de plus $f''(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$, on a l'équivalent : $\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}$ $\forall x_0 \in]a,d)$

$\boxed{\text{DEV 1}}$

Application 9 : Approximation du nombre d'or $a = (1+\sqrt{5})/2$. a est solution de l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$.
On itère $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2+1}{2x-1}$

~~II~~ Application en probabilités

Rappel 10 : Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X la fonction : $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$.
Le thm de Paul Lévy nous dit que
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
ce qui justifie l'intérêt de cette fonction.
Les formules de Taylor nous permettent de faire un développement limité de $\varphi_{X_n}(t)$ au voisinage de 0.

Application 11 : Thm Central Limite
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid.
On note $m = E[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors :
$$\frac{S_n - mn}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$ $\boxed{\text{DEV 2}}$

Application 12 : Calcul d'intervalles de confiance.
$X_n \sim B(p)$, on cherche à estimer p.
Si on note q le $1-\frac{\alpha}{2}$-quantile de la loi $N(0,1)$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, on a :
$$p \in \left[\overline{X_n} - \frac{q\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{q\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}\right]$$
avec probabilité α.
(pour $\alpha = 0{,}05$, on a $q \simeq 1{,}96$)

III Application en géométrie

1) Formules de Taylor en dimension n.

Thm 13 : Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U et si le segment $[a, a+h]$ est tout entier contenu dans U, on a :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k(f(a))(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1}f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Thm 14 : $\forall K$ compact $\subset U$, $\exists C > 0$ telle que : pour $a \in K$ et $a+h \in K$,

$$\| f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k \| \leq C \|h\|^{k+1}$$

Formule de Taylor-Lagrange.

Thm 15 : Formule de Taylor-Young

Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a :

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = o_0(\|h\|^k)$$

2) Étude d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique.

Application 16 : Lemme de Morse à n variables

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, f $\mathcal{C}^3$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine.

On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, (ie) $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique Hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.

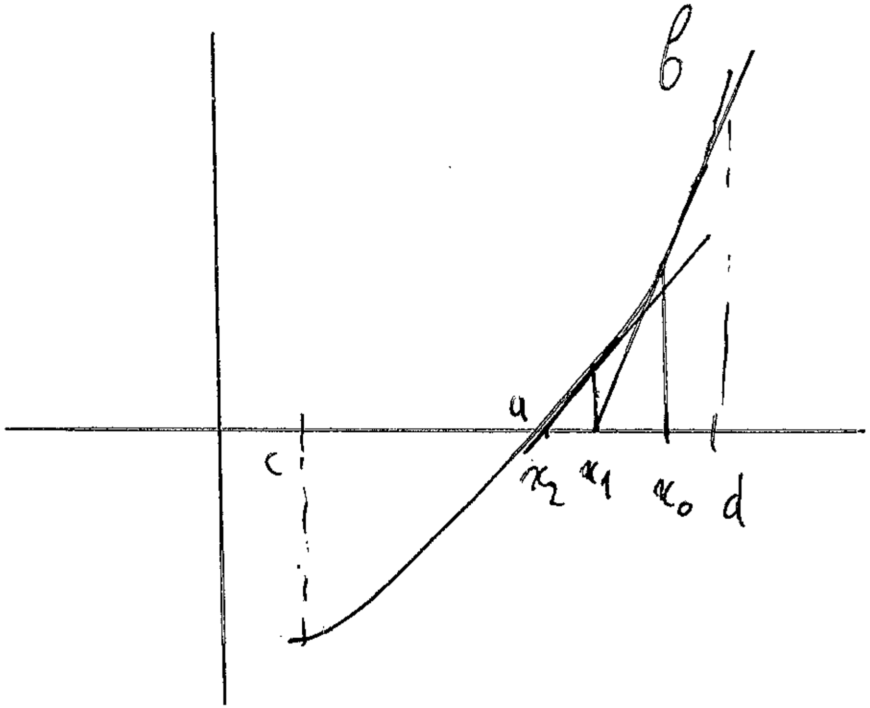
$\exists \varphi : x \to u$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que : $\varphi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

Application 17 : (du lemme de Morse)

Étude précise de la position locale d'une surface $z = f(x, y)$ par rapport à son plan tangent.

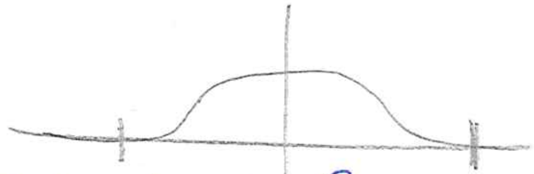
Illustration de la méthode de Newton



- Méthode de Newton : • Comment peut-on trouver un intervalle qui soit assez petit autour du point fi

↳ dichotomie. vitesse de la dichotomie ?
  * pourquoi Newton est mieux ?
  * En terme de décimales ?
  * Méthode de Newton pour une fonction complexe ? (Racines de polynômes complexes ?)

- Dessiner une fonction C^∞ à support compact.



- DL de tan en $x = 0$? RdC de la série de Taylor de tan ?

- point critique quadratique ?

- Taylor et Young pas m siècle => Young arrive une condition minimale sur la différentielle.