Applications des formules de Taylor

218

I - Les formules [GOU]

1.1 Cas général : outils

E et F seront, dans toute la suite, des evn de dimension finie et U désignera un ouvert de E.

<u>Théorème fondamental de l'analyse</u> : Si $f \in \mathcal{D}(U,F)$ et si $[a, a+h] \subseteq U$ alors:

$$f(a+h)-f(a) = \int_0^1 Df(a+th).h\,dt$$

<u>Accroissements finis</u> : Si $f \in \mathcal{C}([a,b],F)$ et $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ sont différentiables sur $]a,b[$, si $\|f'\| \le \|g'\|$ sur $]a,b[$ alors

$$\|f(b)-f(a)\| \le g(b)-g(a).$$

On peut alors montrer les formules de Taylor.

1.2 Les formules de Taylor

Si $f : U \to F$ et $a \in U$, si f est $\mathcal{C}^n$ sur U, on note:

$$R_n^a(h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a).(h,\dots,h)$$

<u>Formule de Taylor-Young</u> : Si f est n fois différentiable en a alors:

$$R_n^a(h) = o(\|h\|^n)$$

<u>Formule de Taylor-Lagrange</u> : Si $[a,a+h] \subset U$ et f est $n+1$ fois différentiable sur U alors:

$$\|R_n^a(h)\| \le \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,a+h]} \|D^{n+1}(f)\|$$

<u>Formule de Taylor reste intégral</u> : Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur U et $[a,a+h] \subseteq U$, alors:

$$R_n^a(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th).(h,\dots,h)\,dt$$

1.3 Cas particuliers

- Dans $\mathbb{R}$, on peut écrire les formules avec des dérivées n-ièmes et on a un cas d'égalité pour Taylor-Lagrange:
$\exists c \in]a,b[$ tel que $R_n^a(b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$
- Si f est polynomiale, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $R_n^a(h) = 0$.
- On dit que f est <u>analytique</u> en a si elle est somme de sa série de Taylor au voisinage de ce point.

1.4 Quelques exemples

- exp est analytique sur $\mathbb{R}$: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ (et aussi sur $M_n(\mathbb{R})$)
- Au voisinage de 0, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\|\cos(h) - (1-h^2+h^4+\dots+(-1)^n h^{2n})\| \le \frac{\|h\|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

II Applications à l'analyse

2.1 Quelques théorèmes classiques

Théorème de Darboux : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Lemme de Bernstein : $I \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur I alors la série de Taylor de f converge uniformément sur tout compact de $\mathring{I}$ vers f.

2.2 Natures de suites / séries

- La suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ vérifie $u_n \sim \sqrt{3/n}$ lorsque $n \to +\infty$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge.

2.3 Développements limités. [ROM]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f admet un DL_n en x_0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + R(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, c'est à dire $R(x) = o((x-x_0)^n)$.

Les a_i sont uniques.

Exemples immédiats liés aux formules de Taylor

Au voisinage de 0 :

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

Prop 1 : Si f est dérivable n fois, elle admet un DL_n en ce point.

Prop 2 : Si f admet un DL_n en x_0, alors si F est une primitive de f, F admet un DL_{n+1} en x_0 qui est :

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(x-x_0)^{i+1} + o((x-x_0)^{n+1})$$

Contre-exemple à la prop 1 : $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

admet un DL_2 mais pas de dérivée seconde.

Remarque : Si f admet un DL_{n+1} en x_0, f' n'a pas forcément de DL_n en x_0.

Contre-exemple : $x^3 \sin(1/x^2)$ prolongée en 0.

III Applications numériques [DEM]

Théorème : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\exists a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$. Si df_a est inversible, il existe un voisinage U de a dans Ω tel que $\varphi : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^m \\ x \to x - df_x^{-1}(f(x)) \end{array}$ soit bien définie et possède a comme point fixe super-attractif. [DEV 1]

III.1 Cas réel et exemple

- Prenons $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ avec $f(a) < 0 < f(b)$ telle que $f' \neq 0$ sur $[a,b]$, alors pour x_0 assez proche du zéro de f,
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
converge vers le zéro de f.

- Exemple : Approximation du nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, solution de $x^2 - x - 1 = 0$ en itérant $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 1 + x_n}{2x_n + 1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$
$x_0 = 1,5$ convient.

III.2 Approximations d'intégrales

Une méthode de calcul approchée est dite d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur à n.

Méthode : On cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$, on subdivise alors $[a,b]$ en $[a, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, b]$ et on approche l'intégrale de f sur chacun des segments par l'intégrale d'un polynôme P_i interpolant f sur ce segment.
On note $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i$ et $e_n(f) = |S_n(f) - \int_a^b f|$ l'erreur associée.
Si $h = \max(a_{i+1} - a_i)$ est le pas on a le tableau suivant :

Méthode	P_i	$S_n(f)$	$e_n(f)$ majoré	Ordre
Rectangles à gauche	$f(a_i)$	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$	$\frac{h(b-a)}{2} M_1$ si $f\,\mathcal{C}^1$	0
Point milieu	$f\left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right)$	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}\right)$	$\frac{h^2(b-a)}{24} M_2$ si $f\,\mathcal{C}^2$	1
Simpson	Polynôme d'interpolation de Lagrange en a_i, a_{i+1} et $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.	$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \times \frac{f(a_{i+1}) + 4 f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}\right) + f(a_i)}{6}$	$\frac{h^4(b-a)}{2880} M_4$ si $f\,\mathcal{C}^4$	3

IV Applications géométriques

4.1 Extremums [ROU]

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$.

Prop : Si f admet un min local en a et f différentiable en a, alors $Df(a) = 0$.

Prop : Si f est deux fois différentiable et $Df(a) = 0$ alors :
- a min local $\Rightarrow D^2 f(a)$ positive
- $D^2 f(a)$ définie positive $\Rightarrow a$ min local

Application : Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en a et $Df(a) = 0$, de Hessienne $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ en a, alors :
- si $rt - s^2 > 0$ f admet un extremum local en a.
- si $rt - s^2 < 0$ f n'admet pas d'extremum local en a.
- si $rt - s^2 = 0$ on ne peut conclure.

Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2$ possède $(0,0)$ pour seul point critique ($Df_{(0,0)} = 0$)
$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ n'est pas un extremum local.

4.2 Lemme de Morse

Énoncé : Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$. Si $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un difféomorphisme $\Phi : x \to u$ entre deux voisinages de 0 tel que $\Phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$. [DEV 2]

Application : Étude de la position locale d'une surface d'équation $z = f(x,y)$ par rapport à son plan tangent.

<u>Références</u> : [DEM] : Demailly : Analyse numérique et équations différentielles

[ROU] : Rouvière : Petit guide du calcul différentiel

[ROM] : Romboldi

[GOU] : Gourdon : Les maths en tête, analyse

ROUSSEL [illegible]

BERAUD Vivien

Méthode de Newton-Raphson

Théorème :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^2, tq $\exists a \in \Omega$ vérifiant $f(a) = 0$ et $D_a f$ inversible.
Il existe alors U un voisinage de a tq $g : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto x - D_x f^{-1}(f(x)) \end{array}$ soit bien définie et possède a comme point fixe superattractif : $\forall x \in U$, la suite $\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ est bien définie et converge vers a.

démo :

Le théorème d'inversion locale appliqué à f en a nous donne un voisinage V de a sur lequel f réalise un C^2-difféom de V sur $f(V)$.

g est alors bien définie sur V et de classe C^1.

On veut faire un développement limité de $g(a+h)$ en a pour étudier son comportement :

La formule de Taylor-Young nous donne : $f(a+h) = \underset{0}{f(a)} + D_a f(h) + \frac{1}{2} D_a^2 f(h;h) + o(\|h\|^2)$
$$= D_a f\left(h + \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;h) + o(\|h\|^2)\right)$$

$$D_{a+h} f = D_a f + D_a^2 f(h;\cdot) + o(\|h\|) = D_a f\left(Id + D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;\cdot) + o(\|h\|)\right)$$

$$\Rightarrow D_{a+h} f^{-1} = \left(Id + D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;\cdot) + o(\|h\|)\right)^{-1} \circ D_a f^{-1} = \left(Id - D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;\cdot) + o(\|h\|)\right) \circ D_a f^{-1}$$

Donc $D_{a+h} f^{-1}(f(a+h)) = \left(Id - D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;\cdot) + o(\|h\|)\right) \circ D_a f^{-1} \circ D_a f \left(h + \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;h) + o(\|h\|^2)\right)$

$$= h + \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;h) - \left(D_a f^{-1} \circ D_a^2 f(h;\cdot)\right)(h) + o(\|h\|^2)$$
$$= h - \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a f^2(h;h) + o(\|h\|^2)$$

Donc $g(a+h) = a + h - h + \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a f^2(h;h) + o(\|h\|^2)$.

Ainsi, $D_a g = 0$ et $D_a^2 g = \frac{1}{2} D_a f^{-1} \circ D_a f^2(h;h)$ par identification du DL_2 de g en a.

On a aussi : $\|g(a+h) - g(a)\| \leq \frac{1}{2} \||D_a f^{-1}\|| \times \||D_a^2 f\|| \times \|h\|^2 + \|o(\|h\|)\|$
$$\leq \left(\frac{1}{2} \||D_a f^{-1}\|| \times \||D_a^2 f\|| + o(1)\right) \|h\|^2$$

En prenant un ouvert de V de la forme $B(a;\varepsilon)$, ε assez petit, les $h \in B(0;\varepsilon)$ seront assez petits pour que le $o(1)$ de l'inégalité précédente soit ≤ 1.

Ainsi, $\forall x = a+h \in B(a;\varepsilon)$, $\|g(a+h) - g(a)\| \leq \left(\frac{1}{2} \||D_a f^{-1}\|| \||D_a^2 f\|| + 1\right) \|h\|^2 = M\|h\|^2 < +\infty$ (car $D_a f^{-1}$ et $D_a^2 f$ sont des fonctions continues sur V, $V_{\times}V$)
$$\leq M\varepsilon^2$$

En prenant $\varepsilon < \frac{1}{M}$, on a alors $\|g(a+h) - g(a)\| < \varepsilon \Rightarrow g(a+h) \in B(a;\varepsilon)$, ce qui implique que $g(B(a;\varepsilon)) \subset B(a;\varepsilon)$.

Pour $x \in B(a, \varepsilon)$, on peut alors définir par récurrence la suite $(u_n)_n$ tq : $u_0 = x$
$u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 0$.

. Ainsi, $\forall n \geq 0$, $\|u_{n+1} - a\| = \|g(u_n) - a\| \leq M \|u_n - a\|^2$

$$\leq M \cdot (M \|u_{n-1} - a\|^2 \cdot M \cdot \|u_{n-1} - a\|^2)$$
$$\vdots$$
$$\leq M^{2^n - 1} \|u_0 - a\|^{2^n} \text{ par récurrence}$$
$$\leq \frac{1}{M} \times \|\underbrace{M(u_0 - a)}_{< 1 \text{ car } \varepsilon < \frac{1}{M}}\|^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc u_n converge vers a à vitesse quadratique.

a est bien un point fixe superattractif de $g = Id - D^{-1}_{f(a)}(f(\cdot))$. $\square$

Référence : Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, p 110

Application : $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 & (1) \\ [illegible] = 0 & (2) \end{cases}$ Permet de tracer de façon approchée (2) [illegible] [illegible]

Recasages pertinents :

215, 2[illegible]7, 226

→ insister sur le côté séquentiel

Lemme de Morse

ref : Rouvière

Théorème 10.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $f(0) = 0$, $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(0)$ soit non dégénérée de signature (p, q). Alors il existe θ un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 tel que*

$$f \circ \theta^{-1}(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

Preuve. On a $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $d^2 f(0) = {}^t P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} P$

On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 à f au voisinage de 0, c'est possible car f est de classe C^2.

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}^2 f(tx)(x, x)\mathrm{d}t = {}^t x Q(x) x$$

où $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}^2 f(tx)\mathrm{d}t$ est une fonction C^1 (car f est C^3 et par dérivation sous le signe intégral) d'un voisinage de 0 à valeurs dans $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$. On est conduit à étudier des familles paramétrées de formes quadratiques. On a le lemme suivant :

Lemme 10.2 *Soit $S_0 \in \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, il existe un voisinage ouvert V de S_0 dans $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ et φ une application C^∞ de V dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall S \in V, \quad {}^t\varphi(S) S \varphi(S) = S_0$$

Preuve. On définit la fonction $\Psi : \mathrm{S}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ par

$$\psi(S, M) = {}^t MSM$$

On remarque que Ψ est C^∞, que $\Psi(S_0, I_n) = S_0$ et que l'objet du lemme est d'étudier le niveau $\Psi^{-1}(S_0)$ au voisinage de (S_0, I_n). On cherche à exprimer M en fonction de S, il faut donc regarder la dérivée partielle par rapport à M :

$$L(H) = \frac{\partial \Psi}{\partial M}(S_0, I_n).H = {}^t HS_0 + S_0 H$$

Le noyau de cette application linéaire $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ est exactement $S_0^{-1}\,\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$. En effet, $H \in \ker L$ si et seulement $S_0 H$ est antisymétrique. On prend alors un supplémentaire vectoriel du noyau, un choix évident est $H = S_0^{-1}\,\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$. On restreint Ψ au sous-espace $\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) \times H$ qui contient (S_0, I_n) car S_0 est symétrique. (On a pas besoin de translater H, ce qu'on pouvait s'attendre à devoir faire). Ainsi on peut résoudre l'équation $\Psi(S, M) = S_0$ au voisinage de (S_0, I_n) par le théorème des fonctions implicites : Il existe une application φ de classe C^∞ d'un voisinage ouvert de S_0 dans $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (quitte à restreindre) telle que

$$\Psi(S, \varphi(S)) = {}^t \varphi(S) S \varphi(S) = S_0$$

Revenons à l'expression de f, et utilisons le lemme avec $S_0 = Q(0)$: ${}^t\varphi(Q(x))\, Q(x)\, \varphi(Q(x)) = Q(0)$ $\forall x$ dans un voisinage de 0, car Q est continue.

$$f(x) = {}^t x {}^t\varphi(Q(x))^{-1} Q(0) \varphi(Q(x))^{-1} x = {}^t\left(P\varphi(Q(x))^{-1}x\right) \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \left(P\varphi(Q(x))^{-1}x\right)$$

Il reste à voir que l'application $x \mapsto \theta(x) = P\varphi(Q(x))^{-1}x$ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0. On applique cette fois le théorème d'inversion locale :

$$\theta(0 + h) = P\varphi(Q(h))^{-1}h = P\varphi(Q(0) + o(1))^{-1}h = P(I_n + o(1))^{-1}h = Ph + o(\|h\|)$$

Donc $\mathrm{d}\theta(0) = P$ est inversible et par inversion locale (θ est C^1), θ est un C^1-difféomorphisme. Ensuite, dans ces coordonnées on a bien :

$$f \circ \theta^{-1}(x) = {}^t x \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} x$$

□