218 Applications des formules de Taylor

Soit $f :]p,q[\to \mathbb{R}$ et $a \in]p,q[$

I - Généralités

1) Développements limités

Def 1 Un DL de f en a à l'ordre n est une fonction polynômiale $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$ telle que $f - P_n = o_a((x-a)^n)$

Prop 2: Les DL sont uniques

Ex 3: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

Prop 4 (Taylor-Young) : Si f est dérivable n fois en a, alors $P_n(x) := f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ est un DL de f en a.

Ex 5 $\sin(x) = x + o(x^2)$

Ex 6: $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Prop 7: Si f admet un DL à l'ordre 1 en a avec $P_1(x) = a_0 + a_1(x-a)$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$

Rq 8: Ce résultat est faux pour les ordres supérieurs. Par exemple, $f(x) := 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 mais n'est pas deux fois dérivable

2) Expressions du reste

Prop 9 (Taylor Lagrange) : Si f est dérivable $n+1$ fois sur $]p,q[$ alors pour tout x dans $]p,q[$, il existe $c \in]a,x[$ tel que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Rq 10: pour $n=0$, il s'agit du TAF

Prop 11 (Taylor reste intégral) : Si f est de classe C^{n+1} sur $]p,q[$ alors :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

Rq 12: Les formules demandent des hypothèses plus restrictives que Taylor-Young, mais elles offrent des formules exactes pour le reste.

Prop 13: (Taylor-Young à plusieurs variables) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ n fois différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors :
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f_a(h^n) + o_a(\|h\|^n)$$

3) Premières applications

Th 14: (Théorème central limite) : Soient $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur un même espace de probabilité. Supposons qu'elles admettent une espérance m et un écart-type $\sigma \neq 0$. Alors la suite $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)_n$ tend en loi vers la loi normale.

Th 15. (Fonctions caractéristiques et moments) Soient X une v.a. et φ_X sa fonction caractéristique. Si X admet un moment d'ordre n, φ_X est C^n et pour tout $k \in [1,n]$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int X^k \exp(itX)\, dP$. Si φ_X est k fois dérivable en 0, avec $k \geq 2$, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2E(k/2)$ donnés par $\mathbb{E}[X^j] = (-i)^j \varphi_X^{(j)}(0)$ DEV 1

Lemme (Hadamard) 16: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geq 1$. Alors pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$, il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n$ de classe C^{p-1} telles que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$
$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) g_i(x)$$

Lemme 17 (Morse) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe C^3 telle que $0 \in U$, $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ non dégénérée. On note $(p, n-p)$ la signature de $d^2 f_0$. Alors, à un C^1-difféomorphisme près, on a :
$$f(x) = f(0) + x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

Ex 18: (Application du Th 15) : Soit $X \sim N(0, \sigma)$ alors
$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}$$
$$\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0$$

II - Application à l'étude locale

1) Extrema locaux

Def 19 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ (U ouvert d'un espace euclidien E). Un point a de U est dit extremum local de f s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_V$ admette un extremum en a.

Ex 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$ n'admet pas de minimum mais admet un minimum local en $1/\sqrt{3}$.

Prop 21 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et admet un extremum local en a, alors $(Df)_a = 0$

Rq 22 : Un point tel que $(Df)_a = 0$ est appelé point critique

C-Ex 23. f n'admet pas forcément d'extremum local en ses points critiques : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 mais n'admet pas d'extremum local

Th 24 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $a \in U$ un point critique et $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}(Df)^2_a(h,h) + o(\|h\|^2)$ le DL de f en a. Alors :

- si $(Df)^2_a$ est définie positive, a est un minimum local.
- si $(Df)^2_a$ est définie négative, a est un maximum local.
- si $(Df)^2_a$ est non dégénérée et pas dans l'un des cas précédents, a est un point col (non extremum local)
- si $(Df)^2_a$ est dégénéré, on ne peut pas conclure.

Ex 25 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ n'admet pas d'extremum local en 0.

Ex 26 : $[x \mapsto x^3]$ et $[x \mapsto x^4]$ ont la même dérivée seconde en 0 mais ont des comportements différents.

2) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Def 27 : Soit $\gamma\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée et $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons x et y dérivables au plus n fois ($n \geq 1$)
Posons $p = \min\{k \in [\![1,n]\!] \mid (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)) \neq (0,0)\}$ (possiblement infini)
Si p est fini, on dit que γ admet comme tangente la droite passant par $(x(t_0), y(t_0))$ et de vecteur directeur $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$

Ex 28 : $\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ admet comme tangente en 0 la droite d'équation $y = 1$

Th 29 : Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée et $t_0 \in \mathbb{R}$ avec x et y dérivables en t_0 n fois. Supposons qu'il existe p et q minimaux dans $[\![1,n]\!]$ tels que $\{(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)), (x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$ et que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ soit un vecteur directeur de la tangente à γ en t_0. Alors on a les 4 cas suivants possibles :

- si p est pair et q impair, t_0 est un point de rebroussement de 1ère espèce
- si p est pair et q pair, t_0 est un point de rebroussement de 2ème espèce
- si p est impair et q pair, t_0 est un point ordinaire
- si p est impair et q impair, t_0 est un point d'inflexion

Rq 30 : Si t_0 n'est pas un point singulier, t_0 n'est pas un point de rebroussement (car p est impair)

Ex 31 : La cardioïde : $t \mapsto (\cos(t)(1+\cos(t)), \sin(t)(1+\cos(t)))$ admet un point de rebroussement de 1ère espèce en 0.

III - Application aux estimations numériques

1) Calculs d'intégrales

Def 32 : (Méthode des rectangles à gauche) Soit $[p,q] \subset \mathbb{R}$ et $a_n = p + \frac{q-p}{n}$. La formule des rectangles appliquée à une fonction $f : [p,q] \to \mathbb{R}$ est $\left(\frac{q-p}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right)_n$

Def 33 : (Méthode du point milieu) Soit $[p,q] \subset \mathbb{R}$ et $a_n = p + \frac{q-p}{n}$
La formule du point milieu appliquée à une fonction $f : [p,q] \to \mathbb{R}$ est $\left(\frac{q-p}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right)_n$

Prop 34 : Si f est continue, les méthodes des rectangles et du point milieu convergent vers $\int_p^q f(t)\,dt$

Prop 35 : L'erreur de la méthode des rectangles est majorée par :
$\left|\int_p^q f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\frac{p-q}{n}\right| \leq \frac{(p-q)^2}{n}\|f'\|_\infty$ lorsque f est dérivable de dérivée bornée

Prop 36 : L'erreur de la méthode du point milieu est majorée par :
$\left|\int_p^q f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\frac{p-q}{n}\right| \leq \frac{(p-q)^3}{24 n^2}\|f''\|_\infty$ lorsque f est 2 fois dérivable de dérivée seconde bornée.

<u>Ex 37:</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

et $\displaystyle\left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,\frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n}$

<u>Ex 38:</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}}\,\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2)$

et $\displaystyle\left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}}\,\frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$

2) Méthode de Newton

On cherche à déterminer de manière approchée les solutions de l'équation $f(x)=0$ pour f suffisamment régulière

<u>Th 39:</u> Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^2 s'annulant en un point $a \in]c,d[$ tel que $f'(a) \neq 0$. Soit $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (définie a priori sur $\{x \mid f'(x) \neq 0\}$)

Alors :

(1) Il existe $\alpha > 0$ tel que $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ soit stable par F et tel que la suite définie par :

$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$ soit bien définie et converge vers a

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1}-a| \leqslant C\,|x_n-a|^2$ (C ne dépend pas de n). On dit que la convergence est au moins quadratique

(2) Si on suppose de plus $\left| \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ et} \\ f''(x) > 0 \end{array} \right.$ pour tout $x \in [c,d]$

on peut choisir $I = [a,d]$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante (ou constante) et

$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant (x_n - a)^2$, $\forall x_0 > a$, $x_{n+1} - a \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$

la convergence est dite exactement quadratique

<u>Ex 40:</u> La suite définie par $x_0 \in [\sqrt{2}, \infty[$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ comme dans le théorème, avec $f(x) = x^2 - 2$ converge vers $\sqrt{2}$

De plus, si $x_0 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$

Alors $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n} = \frac{2}{(4)^{2^n}}$

En 4 itérations, on obtient 9 décimales exactes et en 5 itérations, 18.

Gourdon, Analyse

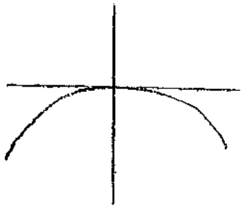
Rouvière

Demailly...

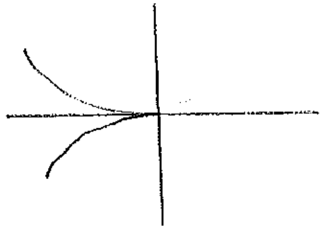
Ouvrard, Probabilités 2

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

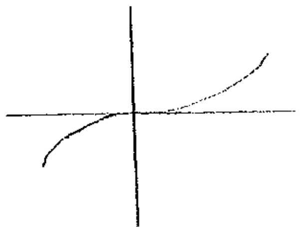
• Point ordinaire



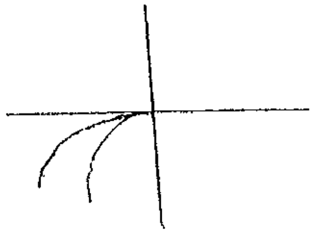
• Point de rebroussement de 1ère espèce



• Point d'inflexion



• Point de rebroussement de 2ème espèce



Développements limités en 0 (usuels)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$(\alpha \in \mathbb{R})$ $$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

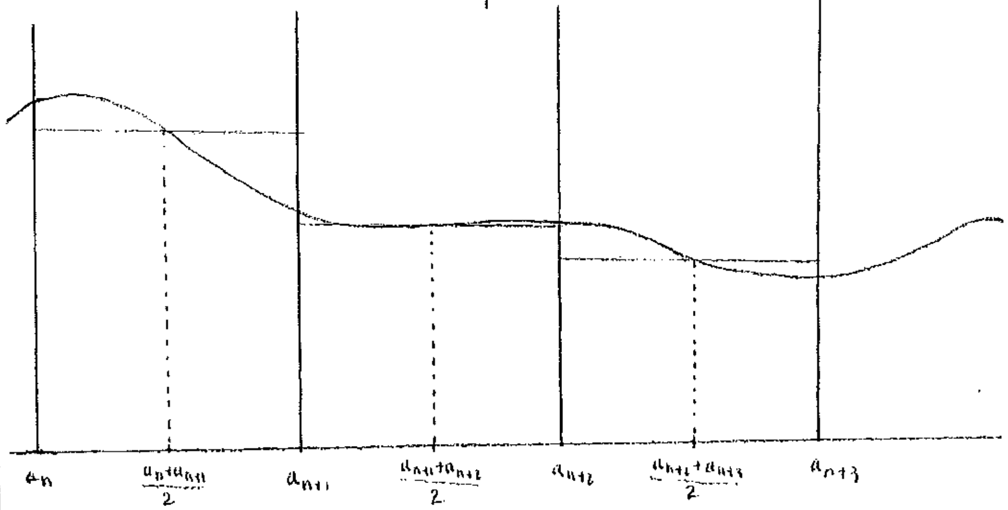
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

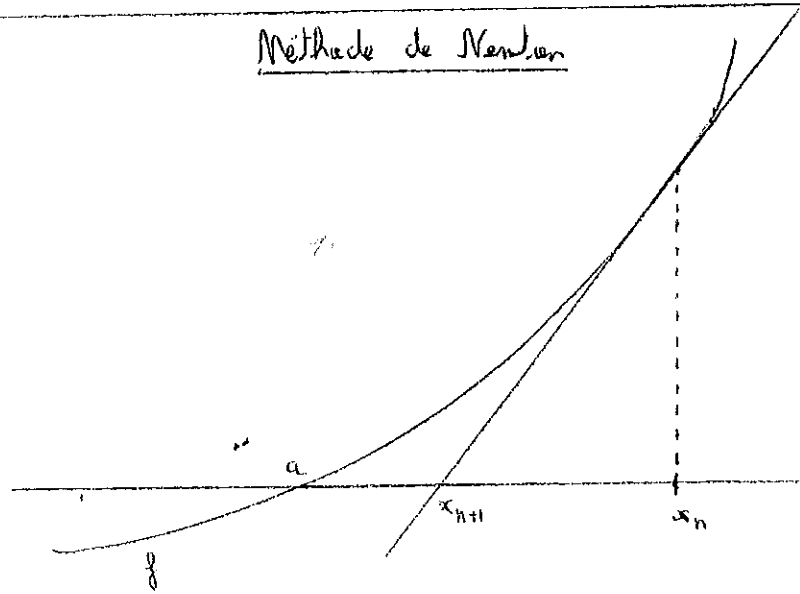
$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

Méthode du point milieu



Méthode de Newton



Ouvrard 2, p 205 | (X, Ω, P) espace probabilisé

Théorème Soit X une variable aléatoire réelle, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique

a) Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, φ_X est de classe C^n et pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$(*) \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\, dP \quad . \text{ En particulier } \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

b) Réciproquement, si φ_X est k fois dérivable en 0 $(k \geq 2)$ X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{k}{2}\right]$ et sont donnés par la formule $(*)$

Preuve

a) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale : on a

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\exp(itX)\right] = (iX)^k \exp(itX) \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{d^k}{dt^k}\left[\exp(itX)\right]\right| \leq |X|^k$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, X admet un moment d'ordre k donc X^k est intégrable : on applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale n fois pour obtenir le résultat.

b) • On commence par démontrer le résultat pour $k = 2$

φ_X est par hypothèse deux fois dérivable en 0 donc admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 (Taylor-Young) :

$$\varphi_X(\pm t) = 1 \pm t\, \varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$

d'où, en additionnant et en divisant par t^2 : $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} = \varphi_X''(0)$

or $\varphi_X(t) + \varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{itX} + e^{-itX}] = \mathbb{E}[2\cos(tX)]$

d'où $\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\varphi_X''(0)$ De plus, $\lim_{t \to 0}\left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right) = \frac{X^2}{2}$

Considérons alors une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 quelconque. Alors :

$$\int_\Omega X^2\, dP = \mathbb{E}\left[2 \liminf_n \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2}\right] \leq 2 \liminf_n \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2}\right]$$

par lemme de Fatou. Finalement, $\int_\Omega X^2\, dP \leq -\varphi_X''(0) < +\infty$

d'où le résultat

• Soit φ_X dérivable k fois. Supposons que l'on ait montré l'existence des moments jusqu'à l'ordre $2(n-1) = 2\left[\frac{k}{2}\right] - 2$, et démontrons que le moment d'ordre $2n = 2\left[\frac{k}{2}\right]$ existe. Par le a) de la proposition, on a

* $\varphi_X^{2(n-1)}(t) + \varphi_X^{2(n-1)}(-t) = (-1)^{n-1}\, 2\, \mathbb{E}[X^{2(n-1)} \cos(tX)]$
* $\varphi_X^{2(n-1)}(0) = (-1)^{n-1}\, \mathbb{E}[X^{2(n-1)}]$

Par hypothèse sur φ_X, $\varphi_X^{2(n-1)}$ est dérivable deux fois en 0 : par formule de Taylor-Young, comme pour le cas particulier $k=2$:

* $$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_X^{2(n-1)}(t) + \varphi_X^{2(n-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(n-1)}(0)}{t^2} = \varphi_X^{(2n)}(0)$$

En combinant ces trois relations, on obtient $\lim\limits_{t \to 0} \mathbb{E}\left[X^{2(n-1)} \frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = \frac{(-1)^n}{2} \varphi_X^{(2n)}(0)$

On applique alors, de la manière que pour le cas $k=2$, le lemme de Fatou, ce qui permet d'obtenir le résultat.

Soit X variable aléatoire suivant une loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

On a $\varphi_X(t) = e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$ de classe C^∞, donc d'après le théorème, X admet des moments à tous les ordres. Calculons-les

$$e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{(\sigma t)^2}{2}\right)^k}{(k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sigma^{2k} t^{2k}}{2^k (k)!}$$

d'où $$\mathbb{E}[X^{2p}] = (-i)^{2p} \times (2p)! \times \frac{(-1)^p \sigma^{2p}}{2^p (p)!} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \sigma^{2p}$$

$$\mathbb{E}[X^{2p+1}] = 0$$

Rouvière p142

Théorème Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ fonction C^2 s'annulant en un point $a\in]c,d[$ tel que $f'(a)\neq 0$. Soit $F: x\mapsto x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ (définie à priori sur $\{x\in[c,d] \mid f'(x)\neq 0\}$). Alors

(1) Il existe $\alpha>0$ tel que $I=]a-\alpha,a+\alpha[$ soit stable par F, et tel que la suite définie par $\begin{cases} x_0\in I \\ x_{n+1}=F(x_n)\end{cases}$ soit bien définie (c.à.d $\forall n\in\mathbb{N}, f'(x_n)\neq 0$) et converge vers a.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1}-a|\leq C|x_n-a|^2$ ($C>0$ ne dépend pas de n). On dit que la convergence est au moins d'ordre 2.

(2) Si l'on suppose de plus $f'(x)>0$ $f''(x)>0$ pour tout $x\in[c,d]$ on peut choisir $I=[a,d]$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante ou constante et

$0\leq x_{n+1}-a\leq C(x_n-a)^2$, $\forall x_0>a$ $\quad x_{n+1}-a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$: la convergence est exactement quadratique asymptotiquement.

Preuve: 1) $f'(a)\neq 0$, f' continue donc quitte à restreindre l'intervalle $[c,d]$ on peut supposer $f'(x)\neq 0$ sur $[c,d]$). On a donc, pour tout $x\in[c,d]$, $F(x)-a = x-a-\frac{f(x)-f(a)}{f'(x)}$

$$= \frac{f(a)-f(x)-(a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en a et x : il existe $c_x\in]\!]a,x[\![$ ($]a,x[$ ou $]x,a[$) tel que $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(c_x)$. On a alors

$F(x)-a=\frac{1}{2}\frac{f''(c_x)}{f'(x)}(x-a)^2$. Posons alors $C=\frac{\max_{[c,d]}|f''(x)|}{\min_{[c,d]}|f'(x)|}$ (existe par continuité)

Pour tout x, $|F(x)-a|\leq C(x-a)^2$. Soit alors $\alpha>0$. tel que $]a-\alpha,a+\alpha[\subset[c,d]$ et tel que $C\alpha<1$. Pour $x\in I$ $|F(x)-a|<\alpha$ donc I est stable par F.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'énoncé est alors bien définie pour tout $x_0\in I$, et

$|x_{n+1}-a|=|F(x_n)-a|\leq C(x_n-a)^2$

Par récurrence, on a alors $C|x_n-a|\leq (C|x_0-a|)^{2^n}\leq (C\alpha)^{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ car $C\alpha<1$

On a donc bien convergence, et celle-ci est d'ordre au moins 2.

2) $\forall x$, $f''(x)>0$ donc f' est croissante : f est convexe sur $]c,d[$. Pour $x\in[a,d]$, on a $f'(x)>0$, $f(x)\geq 0$ d'où $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\leq x$

$< x$ si $x>a$

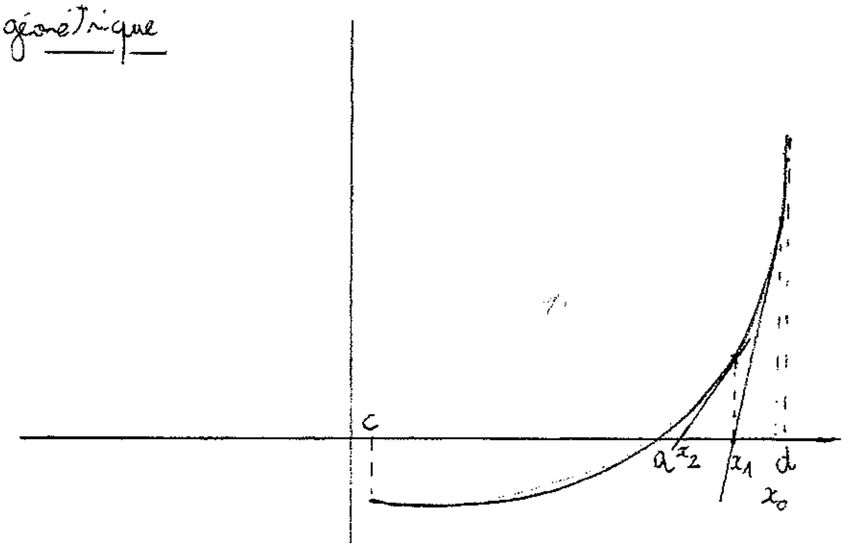
On a aussi $F(x)-a = \frac{1}{2} \frac{f''(c_x)}{f'(x)} (x-a)^2 \geqslant 0$ (∗) par hypothèse

> 0 si $x > a$

L'intervalle $I = [a,d]$ est donc stable par F. Pour $x_0 = a$, la suite est constante ; pour $x_0 \in]a,d]$, on a $a < x_{n+1} < x_n \leq d$: $(x_n)_n$ est décroissante, minorée, donc converge vers $l \in [a,d]$ vérifiant $F(l) = l \Leftrightarrow f(l) = 0$: on a donc $l = a$. Par (∗), la convergence est quadratique. De plus, pour $x_0 \neq a$, on a

$$\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} \neq 0$$, d'où l'équivalent.

<u>Interprétation géométrique</u>



Pour $f : [1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2-2$, (x_n) converge pour tout $x_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$ et l'erreur sur x_n vérifie $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n} = \frac{2}{(4)^{2^n}}$ si $|x_0 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$. En 4 itérations, on obtient 9 décimales exactes, en 5 itérations, 18