219 Problèmes d'extremums

$(E, \|\cdot\|)$ est un evn, C une partie de E.

Def : Soit $a \in C$ et $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que :
- f admet en a un maximum (resp minimum) global ssi $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \geq f(a)$) $\forall x \in C$.
- f admet en a un maximum (resp minimum) local ssi $\exists$ un voisinage ouvert V de a tel que $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \geq f(a)$) $\forall x \in C \cap V$.

On cherche a déterminer $\mathrm{Inf}\{f(x) \mid x \in C\}$.
pb : existence, unicité, calculer l'Inf, déterminer les $x \in C$ qui le réalisent.

I Extremum et topologie.

Théorème : Si f est continue et C compact, f est bornée et atteind ses bornes.

Conséquences :
- théorème de Rolle
- Equivalence des normes en dim finie [GOU]
- théorème du point fixe pour une application "presque" contractante :

si $f : E \to \mathbb{R}$, E compact et vérifie $\forall x \neq y$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, f admet un unique point fixe.

- théorème du min-max : si E est un espace Euclidien et f un endomorphisme symétique, en notant $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres, on a pour $h \in [\![1, n]\!]$: [XENS] [dev]

$$\lambda_h = \min_{\substack{F \text{ sev} \\ \text{de dim } h}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} \langle f(x), x \rangle = \max_{\substack{F \text{ sev} \\ \text{de dim } n-h+1}} \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} \langle f(x), x \rangle$$

- théorème d'entrelacement de Cauchy : Sous les mêmes hypothèses que le thme précédent, si H est un hyperplan de E, en notant p la projection orthogonale sur H, $g = p \circ f$ est symétrique et ses valeurs propres $\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_{n-1}$ vérifient $\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n$.

II Extremum et convexité

1) Fonctions convexes.

Proposition : soit C un convexe, $f : C \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors :
- $M = \{x \in C / f(x) = \mathrm{Inf}_{y \in C} f(y)\}$ est convexe
- Si f est strictement convexe, M est soit vide soit réduit à un point.

Application : Problème de Fermat : Soient A, B, C 3 points non alignés du plan. $\exists !$ T tel que TA + TB + TC soit minimale. [XENS] [OA]

2) Inégalités de convexité.

Prop: $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et $x_1, \dots, x_n \in C$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque : si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$, f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

Conséquences :

[XOUS] Ellipsoïde de John Loewner (pour l'unicité)

[dev] Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ tq $\mathring{K} \neq \emptyset$, $\exists!$ ellipsoïde centré en 0 de volume maximal contenant K

- Inégalité arithmético-géométrique.

Application : parmi tous les triangles de périmètre p, le triangle équilatéral est le seul d'aire maximale.

3) Projection

Déf : $f : E \to \mathbb{R}$ est coercive si $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.

Prop : E de dim finie, f continue coercive, C partie fermée $\Longrightarrow$ f admet un inf sur C.

Applications :

- théorème de d'Alembert Gauss
- Si F est un sev de dim finie de E, $\forall x \in E$, $\exists\, \bar{x} \in F$ tq $\|x - \bar{x}\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
- théorème de projection sur un convexe fermé en dim finie

Théorème : Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert, C un convexe fermé, $\forall x \in E$, $\exists!\, \bar{x} \in E$ tq $\|x - \bar{x}\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$
$\bar{x}$ est caractérisé par $\forall y \in C$, $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0$

Conséquence : théorème de Riesz

$$\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E' \\ a \longmapsto x \mapsto \langle a, x \rangle \end{array}$$ est un isomorphisme.

- théorème de Hahn Banach dans un Hilbert.

Théorème : Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, et F un sev de dim finie de E, $\bar{x}$ est le projeté orthogonal de x sur F. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F, on a $\|x - \bar{x}\|^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

où $G(x_1, \dots, x_m) = \det\left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$

Applications :

- $\inf \left\{ \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, dx \;/\; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n \right\} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

- Droite des moindres carrés : Etant donné n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i non tous égaux, $\exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimale. [ROU]

III Extremum et calcul différentiel.

Ici, $E = \mathbb{R}^n$ et C est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1) Extremum libre.

Prop : Si $f : C \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en $a \in C$ et est différentiable en a, $d_a f = 0$.

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse, mais si C et f sont convexe, elle est vraie.

<u>Théorème</u> : Si f est $\mathcal{C}^2$ sur C, et si $a \in C$ vérifie $d_a f = 0$, alors en notant H la matrice hessienne de f en a ;
- Si f admet un min (resp max) relatif en a, H est positive (resp négative).
- Si H est définie positive (resp définie négative), f admet un min (resp un max) local en a.

Exemple : en dim 2, si $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, alors :
- si $\det H > 0$ et $r > 0$, f admet un min en a
- si $\det H > 0$ et $r < 0$, f a un max en a
- si $\det H < 0$, f n'a pas d'extremum en a

[GOU] <u>Corollaire</u> : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, D la boule unité ouverte et $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
Si $\Delta f(x) = 0$ $\forall x \in D$, alors :

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y) \quad \forall x \in D.$$

2) Extremum sous contrainte

<u>Théorème</u> : Soient $f, g_1, \dots, g_r : C \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur C et $\Gamma = \{x \in C \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $d_a g_1, \dots, d_a g_r$ sont linéairement indépendantes,
$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r \,/\, d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_r d_a g_r$.

<u>Applications</u> :
- Inégalité arithmético-géométrique [GOU]
- Tout endomorphisme symétrique admet une valeur propre réelle (en dim finie).
(corollaire : un tel endomorphisme est diagonalisable [OA] en b o n).
- En notant $\|.\|$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tA B)$, on a : [OA]

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \|M\| = \inf_{A \in SL_n(\mathbb{R})} \|A\| \}.$$

<u>Références</u> :

XENS : algèbre 3
GOU : Gourdon analyse
OA : objectif agrégation
ROU : Rouvière
Ciarlet : introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation, pour des méthodes de calcul d'extremum.