219

Extremums : existence, caractérisations, recherche. Exemples et applications.

I - Situations classiques d'existence d'extremums.

1) Définitions.

Déf 1 : Soient X un ensemble non vide, Y une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, $f : X \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in X$. On dit que x_0 est un minimum (resp. maximum) global de f sur X lorsque pour tout $x \in X$, $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$).

Ex : *) $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$. $0_{\mathbb{R}^n}$ est minimum global de f sur X.

$*_2$) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$. $m = \{(2k+1)\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des minimums globaux de f sur $\mathbb{R}$.

Déf 2 : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, Y une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, $f : X \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in X$. On dit que : i) x_0 est un minimum local (resp. local strict) de f sur X lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$, $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) < f(x)$) ; ii) x_0 est un maximum local (resp. local strict) de f sur X lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$, $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) > f(x)$).

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto (x^2+y^2-1)^2 + 2$ a un maximum local sur $\mathbb{R}^2$ égal à 3.

Vocabulaire : Le terme extremum désigne indifféremment un minimum ou un maximum.

Prop 1 : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application. L'ensemble des minimums (resp. maximums) locaux stricts de f sur X est dénombrable.

2) Extremums et compacité.

Thm 1 : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique compact, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur X. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Applications : $*_1$) Soient (E, d) un espace métrique, K_1, K_2 deux compacts non vides de E. Il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = D(K_1, K_2)$ (voir figure 1.).

$*_2$) Soient (E, d) un espace métrique, K un compact non vide de E, F un fermé de E. Si $K \cap F = \emptyset$, alors $D(K, F) \neq 0$.

Déf 2 : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, Y une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, $f : X \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in X$. On dit que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) lorsque pour tout réel $r < f(x_0)$ (resp. $r > f(x_0)$), il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, $r < f(x)$ (resp. $r > f(x)$). Si f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point de X, on dit que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur X.

Illustration : Voir figure 2, 3.

Ex : *) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.

$*_2$) $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto \operatorname{rg} M$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Thm 2 : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique compact, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur X. Il existe $\bar{x} \in X$ tel que $\inf_X f = f(\bar{x})$ (resp. $\sup_X f = f(\bar{x})$).

Application : Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction semi-continue inférieurement sur X telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfaisant $\{f \leq \lambda\}$ compact non vide de X. Alors, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $f(\bar{x}) = \inf_X f$.

3) Extremums et convexité.

Déf. 3 : Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, C un convexe de X, Y une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, $f : C \longrightarrow Y$ une application. On dit que

f est convexe lorsque l'ensemble $\mathrm{epi} f = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} / f(x) \leq t\}$ est convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Illustration : Voir figure 4.

Thm 3 : Soient $(X, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, $a \in X$ tel que $f(a) \neq +\infty$. Si a est minimum local de f sur X, alors a est minimum global de f sur X.

Contre - exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x \longmapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

0 est minimum local de f sur $\mathbb{R}$

Thm 4 : Soient $(X, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace de Banach réflexif, C un convexe de E, fermé dans E, non vide, $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement sur C, $f \not\equiv +\infty$ telle que $\lim\limits_{x \in C,\ \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ (aucune hypothèse si C est borné). Alors, il existe $\bar{x} \in C$ tel que $f(\bar{x}) = \inf f$.

Application : Preuve alternative du thm 5.

4) Extremums et espaces de Hilbert.

Thm 5 : Soient $(\mathcal{H}, <,>)$ un $\mathbb{K}$ - espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $P_C(x) \in C$ qui réalise la distance de C à x. De plus, pour tout $x, u \in \mathcal{H}$, $u = P_C(x)$ ssi $u \in C$ et pour tout $y \in \mathcal{H}$, $\mathrm{Re}(<x-u, y-u>) \leq 0$.

Illustration : Voir figure 5.

Application : Hahn - Banach géométrique dans les Hilbert.

DVLT 1

Prop 2 : Soient $(\mathcal{H}, <,>)$ un $\mathbb{K}$ - espace de Hilbert, C une partie convexe de $\mathcal{H}$ non vide, ~~fermée dans $\mathcal{H}$, bornée~~, $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement sur C. Alors, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $\inf\limits_{C} f = f(\bar{x})$.

II - Extremums sur un ouvert

1) Condition nécessaire du 1er ordre.

Déf. 4 : Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $x_0 \in U$. On dit que x_0 est un point critique de f lorsque f est différentiable en x_0 et lorsque $d_{x_0} f = 0$.

Ex : $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ a trois points critiques $(0,0)$; $(0, \sqrt{2})$; $(0, -\sqrt{2})$

Thm 6 : Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $x_0 \in E$. Si x_0 est un extremum local de f, alors x_0 est un point critique de f.

DVLT 2

Application (Point de Fermat) : Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, non alignés tels que les angles du triangle ABC soient inférieurs strictement à $\frac{2\pi}{3}$. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto MA + MB + MC$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, atteint en un unique point $P \in \mathbb{R}^2$, intérieur au triangle ABC.

Prop 3 : Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, convexe dans E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, différentiable sur U, $x_0 \in U$. Si x_0 est un point critique de f, alors x_0 est un minimum global de f sur E.

2) Condition nécessaire du 2ème ordre.

Thm 7 : Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, $x_0 \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en x_0. Si x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f sur U, alors la forme bilinéaire $d^2_{x_0} f$ est positive (resp. négative).

Ex : $\mathrm{Hess}_{(0,0)} \varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; ni positive, ni négative. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extremum local de φ sur U.

Application (Principe du maximum) : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, Δf son Laplacien, $\mathbb{U}$ (resp. $\mathbb{B}$) la boule unité ouverte (resp. fermée) de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si pour tout $x \in \mathbb{U}$, $\Delta f(x) > 0$ (resp. $\Delta f(x) = 0$), alors pour tout $x \in \mathbb{U}$, $f(x) < \max\limits_{\mathbb{B}} f$ (resp. $\min\limits_{\mathbb{B}} f \leq f(x) \leq \max\limits_{\mathbb{B}} f$).

3) Condition suffisante à l'existence d'un extremum.

Déf 5 : Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire de E. On dit que b est coercive lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $b(x,x) \geq a\|x\|^2$.

Thm 8 : Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, $x_0 \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est deux fois différentiable en x_0, si x_0 est un point critique de f et si $d^2_{x_0} f$ est coercive, alors x_0 est un point de minimum local strict.

Rq : En dimension finie, on peut remplacer coercive par définie positive.

Ex : On a $\mathrm{Hess}_{(0,\sqrt{2})} \varphi = \mathrm{Hess}_{(0,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi, $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ sont des minimums locaux de φ sur $\mathbb{R}^2$.

4) Minimisation sous contraintes égalitaires.

Thm 9 : Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f, g_1, \dots, g_r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 sur U, $\Gamma = \{x \in U / g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d_a g_1, \dots, d_a g_r$ de $\mathbb{R}^n$ forment une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_r d_a g_r$.

Applications : *1) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 + y^3$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 = 0\}$

g n'a pas de maximum sur Γ.

*2) Inégalité arithmético-géométrique : Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

III - Gradient à pas optimal.

1) Le problème et le cadre.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre le problème de minimisation sans contraintes $\inf_{\mathbb{R}^n} f$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\nabla f(x)$ le gradient de f en $x \in \mathbb{R}^n$.

2) L'algorithme. (Illustration : figure 6)

Fixons un réel $\varepsilon > 0$. L'algorithme du gradient à pas optimal est donné par les étapes ci-dessous :

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Etape 1 : Si $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$, alors arrêt.

Etape 2 : On pose $d_k = -\nabla f(x_k)$.

Etape 3 : On détermine $t_k \in [0, b]$ tel que $g_k(t_k) = \min_{[0,b]} g_k$

où $g_k : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x_k + t d_k)$

$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, $k \longrightarrow k+1$, retour à l'étape 1.

3) Convergence de l'algorithme.

L'algorithme de gradient à pas optimal fournit l'existence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$. On dit d'une telle suite qu'elle est stationnarisante pour f.

Rq : En général, la convergence est lente.

Thm 10 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Toute suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, bornée et stationnarisante pour f est minimisante pour f.

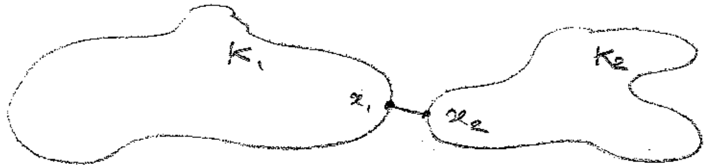
Références : *1) Objectif Agrégation ; Beck

*2) Analyse ; Gourdon

*3) L3 Analyse ; Marco

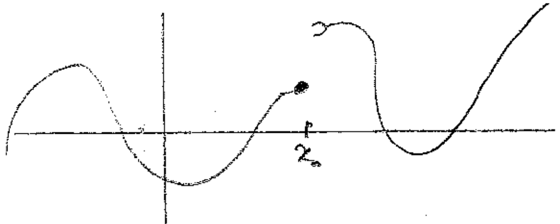
*4) Analyse convexe ; Azé

ANNEXE :



$D(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

Figure 1.



S.C.I. en x_0

Figure 2.

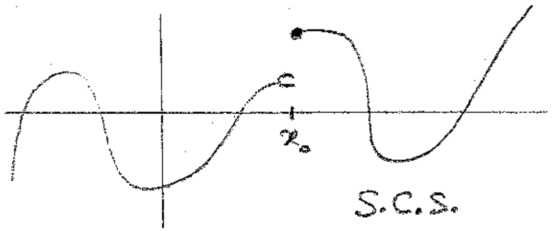


Figure 3.

S.C.S. en x_0

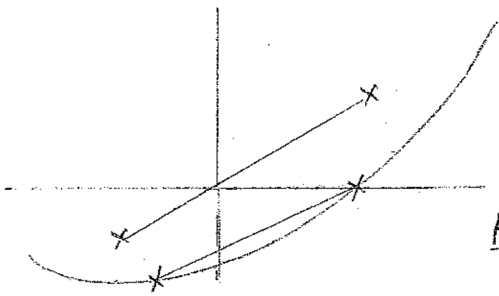


Figure 4.

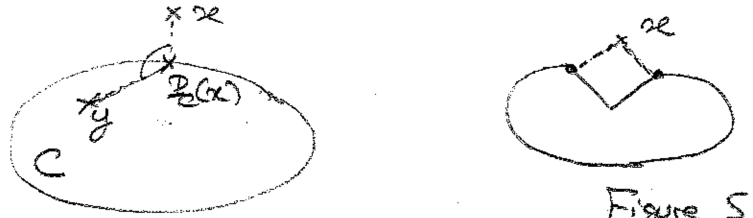


Figure 5.

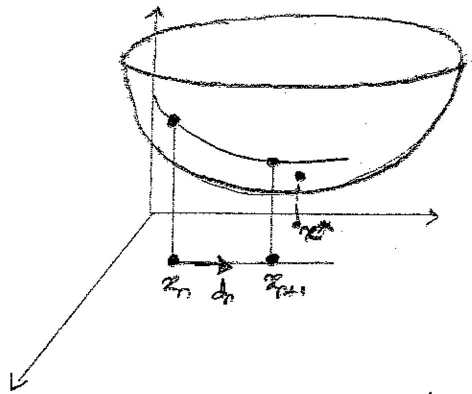


Figure 6.

Méthode de descente pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$