219

Extremums: Existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

~~La recherche d'extremum est très importante. Elle permet entre autres d'établir des résultats d'existence.~~

Cadre: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n. Soit $U \subset E$ non-vide.
On munit E de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

I - Extremums: définitions et existence

1 - Définitions.

[R] p370 Déf 1: Soit $a \in U$. Soit $f: U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet:
- un minimum global en a lorsque: $\forall x \in U, f(x) \geq f(a)$
- un minimum local en a lorsque: $\exists V$ voisinage de a dans E tel que $\forall x \in V \cap U$, $f(x) \geq f(a)$
- un minimum strict lorsque: $\forall x \in U \setminus \{a\}, f(x) \neq f(a)$.

Rq 2: On définit de même le maximum.

[T] p388 Ex 3: • $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x|\end{array}$ admet un minimum local en $(0,0)$, qui n'est pas strict.

• $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x|+|y|\end{array}$ admet un minimum local strict en $(0,0)$

2 - Existence :

[T] p44 Thm 4: Si U est un compact de E et $f: U \to \mathbb{R}$ est continue sur U, alors f est bornée sur U et atteint ses bornes.

[T] p50 Ex 5: Soit $N: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une norme. N est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donc sur le compact $S_\infty(0,1)$: elle y est bornée et atteint son minimum.

[T] p49 App 6: Équivalence des normes en dimension finie: Soient N_1, N_2 deux normes de E. Alors:
$\exists \alpha, \beta > 0, \ \forall x \in E, \ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

Conséquences:

[T] p46 Déf 7: $f: U \to \mathbb{R}$ est dite coercive lorsque: $\forall A > 0$, $\exists B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, (\|x\| \geq B$ ou $d(x, U^c) \leq \alpha)$ $\Rightarrow f(x) \geq A$ (où $d(x,U^c) = \min_{y \in U^c} \|x-y\|$)

Rq 8: Dans le cas où $U = E$ cela équivaut à: $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Thm 9: Soit $f: U \to \mathbb{R}$ continue et coercive. Alors f est minorée et atteint sa borne inférieure. [T] p46

Ex 10: $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2\end{array}$ est continue et coercive. Elle atteint son minimum en $(0,0)$.

App 11: Théorème de d'Alembert: Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant admet au moins une racine complexe. [T] p48

Cor 12: Si $f: U \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive, telle que: [T] p48
$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \ (\|x\| \geq B$ ou $d(x, U^c) \leq \alpha)$
$\Rightarrow (f(x) \leq \varepsilon)$
Alors f est majorée sur U et atteint sa borne supérieure.

Ex 13: $f: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x^2}\end{array}$ vérifie les hypothèses et admet un maximum global.

3) Théorème de projection.

Thm 14: Soit C un fermé de E. Alors: [DA] p35
- $\forall x \in E, \exists P_C(x) \in C$ tel que $\forall y \in C, \|x - P_C(x)\| \leq \|x-y\|$
- Si de plus C est convexe: $P_C(x)$ est unique et caractérisé par: $\begin{cases} P_C(x) \in C \\ \forall y \in C, \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0. \end{cases}$

App 15: * Théorème de Motzkin: Soit U un fermé de $\mathbb{R}^n$. U est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in U^c$, $\varphi_x: \begin{array}{l}U \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|y-x\|\end{array}$ atteint son minimum en un unique point de U. [T] 265

* Moindres carrés: Soient $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$ n points de $\mathbb{R}^2$, les x_i non tous égaux. Alors: $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimale. [R] p384

II - Extremums et calcul différentiel.

Dans cette partie, on suppose U ouvert.

1 - Ordre 1:

[R] p371
Thm 16: Soit $f : U \to \mathbb{R}$; Soit $a \in U$. Si f admet un extremum local en a, et si $Df(a)$ existe, alors : $Df(a) = 0$. (on dit que a est un point critique de f).

[R] p380 [OA] p17
Ex 17: * $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x^2+y^4)$ admet un minimum global strict en $(0,0)$.

* (contre-exemple) : $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$: $Df(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.

[T] p71
Application 18: * Théorème de Rolle : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$.

* Théorème des accroissements finis : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists\, c \in]a,b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2 _ Ordre 2 :

[R] p371
Thm 19: Soit $f : U \to \mathbb{R}$; Soit $a \in U$. Si f admet un minimum local en a, et si $D^2f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive

[R] p378
Ex 20: * $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^4$ admet un minimum local en $(0,0)$; $D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive.

[OA] p18
* (contre-exemple) : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^3$ → $(0,0)$ est un point critique de f ; $D^2 f(0,0)$ est positive mais $(0,0)$ n'est pas un min de f

[R] p371
Thm 21: Soit $f : U \to \mathbb{R}$; Soit $a \in U$. Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.

[R] p379
Ex 22: * $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ admet trois points critiques dont $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ en lesquels D^2f est définie positive, f admet un minimum local en ces points.

[OA] p18
* (contre-exemple) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^4$ admet un minimum strict en $(0,0)$. Mais $D^2f(0,0)$ n'est pas définie positive.

3) Problèmes sous contraintes.

Thm 23 : (extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_p : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$. Alors si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les $Dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, [R] p372 DEV
$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a)$ faire un dessin (sous-variétés)

Rq 24 : * Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.
* Interprétation géométrique : $Df(a)$ est nulle sur le plan tangent en a à $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, Dg_i(a)$ [OA] p20 (?)

[OA] p21
Ex 25 (contre-exemple) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y^2$; Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3-y^2$. f admet un minimum en $(0,0)$ et $\{Dg(0,0) = 0\}$ n'est pas libre ; la relation du théorème n'est pas vérifiée.

[OA] p21
App 26 : * Diagonalisation des endomorphismes symétriques : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

[G] p315-320
* Inégalité arithmético-géométrique : $\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^+$, $\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m}$

III - Autres outils.

1 _ Fonctions convexes.

On suppose dans cette partie que U est un convexe de E, $U \neq \emptyset$.

Def 27 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$. f est convexe lorsque : $\forall x,y \in U, \forall t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
- Si de plus l'inégalité est stricte, on dit que f est strictement convexe.

[OA] p30
Thm 28 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe, les conditions nécessaires des théorèmes 16 et 19 sont aussi suffisantes.

Ex 29 : * $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est (strictement) convexe. $Df(0) = 0$ donc 0 est un minimum local de f.

* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^x$. f est convexe et $\forall x\in\mathbb{R}$, $Df(x)\neq 0$ donc f n'admet pas de minimum.

Rq30: $x\mapsto e^x$ est convexe et minorée mais n'admet pas de min.

[OA] p30 Thm31: Si $f:U\to\mathbb{R}$ est strictement convexe et admet un minimum alors il est unique.

Rq: Il faut SUPPOSER que le minimum existe!

Ex32: 0 est l'unique minimum de $x\mapsto x^2$.

[R] p381 Thm 33: Si $f:U\to\mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors il est global.

[OA] p30 [R] p387 App 34: * Point de Fermat: Soient A, B, C des points de $\mathbb{R}^2$ non-alignés. Il existe un unique P qui minimise la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\Pi\mapsto A\Pi+B\Pi+C\Pi$.

DEV [FGN] p229 * Ellipsoïde de John-Loewner: Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

2_ Fonctions holomorphes.

[T] p228 Thm35: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; Soit $f:U\to\mathbb{C}$ holomorphe. Soit $z_0\in\mathbb{C}$; Soit $r>0$ tels que $\overline{D}(z_0,r)\subset U$.

Alors • $\max_{z\in\overline{D}(z_0,r)}|f(z)| = \max_{z\in\mathcal{C}(z_0,r)}|f(z)|$.

• Si $\exists z_1\in D(z_0,r)$ / $|f(z_1)| = \max_{z\in\overline{D}(z_0,r)}|f(z)|$, alors f est constante sur $\overline{D}(z_0,r)$.

Si de plus U est connexe, f est constante sur U.

[T] p230 App 36: * Lemme de Schwarz: Soit $f:D(0,1)\to D(0,1)$ holomorphe. Alors: 1) $\forall z\in D(0,1)$, $|f(z)|\leq|z|$ 2) $|f'(0)|\leq 1$ 3) Si $\exists z\in D(0,1)\setminus\{0\}$ / $|f(z)|=|z|$, ou si $|f'(0)|=1$ alors: $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|=1$ / $\forall z\in D(0,1)$, $f(z)=\lambda z$.

[T] p233 * Théorème de l'application ouverte: Soit $f:U\to\mathbb{C}$. Si f est holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors: Si f n'est pas constante, $f(U)$ est un ouvert.

3) Transformée de Fourier.

Thm37: Inégalité isopérimétrique.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que: $f(a)=f(b)$, f sans point double, de longueur ℓ, et enfermant une surface S. Alors: [T] p184

$$\ell^2\geq 4\pi S.$$

Il y a égalité ssi f définit un cercle.

IV_ Algorithmes de recherche.

1_ Méthode de Newton.

Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que: $f(c)<0<f(d)$, et $\forall x\in[c,d]$, $f'(x)>0$.

On considère (quand c'est défini) la suite: $x_0\in[c,d]$, $x_{n+1}=F(x_n)$ avec $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. [R] p152

On note a l'unique zéro de f.

Alors: • $\exists\alpha>0$, $I=[a-\alpha,a+\alpha]$ soit stable par F

• $\forall x_0\in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a à vitesse quadratique.

Si de plus f est strictement convexe sur $[c,d]$, alors $I=[a,d]$ est stable par F et $\forall x_0\in I$, $(x_n)_n$ est définie et strictement décroissante; et $\underbrace{x_{n+1}-a}_{\text{si } x_0>a}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2$.

2_ Méthode du gradient à pas optimal.

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\exists d>0$ / $\forall x\in\mathbb{R}^n$, la plus petite valeur propre $\lambda_1(x)$ de $D^2f(x)$ vérifie $\lambda_1(x)\geq d$.

Alors: f est strictement convexe et coercive, donc admet un unique minimum global a. [T] p276 279

On définit: $\begin{cases}\alpha_k=\operatorname{argmin} f(x_k-t\nabla f(x_k))\\ x_{k+1}=x_k-\alpha_k\nabla f(x_k)\end{cases}$

Thm 38: $(x_k)_k$ converge vers a.

Références :

- [R] : François Rouvière, Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.
- [M] : Jean-Marie Monier, Analyse MPSI.
- [T] : Frédéric Testard, Analyse mathématique : La maîtrise de l'implicite.
- [OA] : Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation
- [G] : Gourdon, analyse
- [FGN] : Oraux X-ENS, algèbre 3 (2013).

* **Exo 1** : Démontrer l'appli 26.

* **Exo 2** : $K = [a,b]$. x_0 un minimum de f strict et interne.

(f_n) CVU f

Existe-t-il une suite $(x_n)_n$ de pts de min de f_n tq $x_n \to x_0$.

$\boxed{\text{Oui !}}$ extraire 1 sous suite puis utiliser CVU. réduire l'intervalle et mini strict pour être global.

$\boxed{\text{et sans CVU ?}}$

$f_n(x) = n^2(x^n - x^{n+1}) - x \qquad x \in [0,1]$.

$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad f(x) = -x$.

$f_n'(x) = \dots = 0$.

Exo 3 : f convexe sur $I =]\alpha, \beta[$.

f admet un maximum interne.

$\underline{f \text{ constante}}$. $\quad a = x_0 - \eta \quad b = x_0 + \eta$

$\forall t \in [0,1] \quad f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

$f(x_0) \leq \dfrac{f(a) + f(b)}{2} < f(x_0)$

?

Ellipsoïde de John-Loewner

Réf : Oraux X-ENS, algèbre 3 p229 (et p223 à 228) (2013).

Th : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

dém : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

On remarque qu'un ellipsoïde centré en 0 est défini par une équation du type $q(x) \leq 1$ avec q une forme quadratique définie positive.

On note $Q = \{\text{forme quadratique}\}$, $Q_+ = \{\text{forme quadratique positive}\}$ et $Q_{++} = \{\text{forme quadratique définie positive}\}$.

Pour $q \in Q_{++}$, on note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, q(x) \leq 1\}$.

Étape 1 : Calcul du volume V_q de $\mathcal{E}_q$.

Comme $q \in Q_{++}$, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors : $V_q = \int\int\dots\int_{\sum a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$.

On considère $\varphi : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1/\sqrt{a_1}, \dots, x_n/\sqrt{a_n})$, c'est un C^1 difféomorphisme donc φ définit un changement de variable.

Donc $V_q = \int\int\dots\int_{\sum_1^n t_i^2 \leq 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} = \frac{V_0}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$ où V_0 = volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique.

De plus, si $S = \mathrm{Mat}(q)$ dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$ alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, S = P \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)} {}^tP$

donc $\det S = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \prod a_i$.

Le déterminant ne dépend pas de la base orthonormale choisie, on le note $D(q)$.

Ainsi $\boxed{V(q) = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}}$

$\to$ On cherche $q \in Q_{++}$ qui minimise V_q donc on cherche $q \in Q_{++}$ qui maximise $D(q)$.

Étape 2 : Existence du maximum $q_0 \in Q_{++}$ de $D : Q_{++} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto D(q)$

On munit Q de la norme N définie par $N(q) = \sup_{\|x\|=1} |q(x)|$.

On considère $\mathcal{A} = \{q \in Q_+ \,/\, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$ et on cherche à maximiser D sur $\mathcal{A}$.

• On montre que $\mathcal{A}$ est un compact non vide.

1) $\mathcal{A}$ est fermé : Soit $(q_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$ qui converge vers q dans Q.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|q_n(x) - q(x)| \leq N(q_n - q) \|x\|^2$ donc $q_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} q(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \geq 0$ car $\forall n \geq 0$, $q_n(x) \geq 0$ et de même $q(x) \leq 1$, $\forall x \in K$ car $\forall n \geq 0$, $q_n(x) \leq 1$.

Donc on a bien $q \in \mathcal{C}$ i.e. $\mathcal{C}$ fermé.

2) $\mathcal{C}$ borné. Comme K est d'intérieur non vide, $\exists a \in \mathring{K}, \exists r>0$ / $B(a,r) \subset K$.

Soit $q \in \mathcal{C}$ si $\|\alpha\| \leq r$ alors $a+\alpha \in K$ donc $q(a+\alpha) \leq 1$ et $q(-a) = q(a) \leq 1$

donc par l'inégalité de Minkowski : $\sqrt{q(\alpha)} = \sqrt{q(\alpha+a-a)} \leq \sqrt{q(\alpha+a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2$

donc $q(\alpha) \leq 4$ si $\|\alpha\| \leq r$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\alpha\| \leq 1$, $q(\alpha) = \frac{1}{r^2} q(r\alpha) \leq \frac{4}{r^2}$ donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$ i.e. $\mathcal{C}$ borné.

$\rightarrow$ Comme Q est de dimension finie, on a bien montré que $\mathcal{C}$ est un compact de Q.

3) $\mathcal{C}$ non vide. Comme K est compact, il est borné i.e. $\exists R>0$ / $\forall x \in K$, $\|x\| \leq R$.

donc $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{R^2} \in \mathcal{C}$ i.e. $\mathcal{C}$ est non vide.

$\rightarrow$ Ainsi comme $\mathcal{C}$ est un compact non vide de Q, et que $\det$ est une application continue sur $\mathcal{C}$, elle atteint ses bornes, en particulier son maximum en $q_0 \in \mathcal{C}$.

De plus comme $\left(q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{R^2}\right) \in \mathcal{C}$ on a $D(q_0) \geq D(q) = \left(\frac{1}{R^2}\right)^n > 0$ donc $q_0 \in Q_{++}$

D'où il existe un ellipsoïde E_{q_0} centré en 0 de volume minimal contenant K.

Étape 3 : Unicité de cet ellipsoïde i.e. de ce q_0.

On commence par montrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Soient $q, q' \in \mathcal{C}$, $\lambda \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^n$: $(\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0$

et $\forall x \in K$, $(\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$. Donc $\lambda q + (1-\lambda) q' \in \mathcal{C}$.

i.e. $\mathcal{C}$ est convexe.

On va montrer que la fonction $D^{-\frac{1}{2}} : q \in Q_{++} \mapsto D(q)^{-\frac{1}{2}}$ est strictement convexe sur $Q_{++} \cap \mathcal{C}$

et comme elle y admet un minimum, il sera unique. On aura donc bien unicité de q_0.

Lemme : Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \leq \det(A+B)^{\frac{1}{n}}$.

dém : Par le théorème de pseudo-réduction $\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ / $A = {}^tPP$ et $B = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P$

on a donc $\det A = \det P^2$, $\det B = \det P^2 \prod_1^n \lambda_i$ et $\det(A+B) = \det P^2 \prod_1^n (1+\lambda_i)$

Il faut donc montrer que $\left(\prod_1^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} + 1 \leq \left(\prod_1^n (1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Par inégalité arithmético-géométrique $\left(\prod_1^n \frac{1}{1+\lambda_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_1^n \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{1}{1+\lambda_i} + \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} = 1$

Donc $1 + \left(\prod_1^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_1^n (1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}}$ (en multipliant par $\left(\prod_1^n (1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}}$) $\square$

Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $t \in]0,1[$: $[\det(tA + (1-t)B)]^{-\frac{1}{2}} = \left[\det(tA + (1-t)B)^{\frac{1}{n}}\right]^{-\frac{n}{2}}$

$\leq \left[\det(tA)^{\frac{1}{n}} + \det((1-t)B)^{\frac{1}{n}}\right]^{-\frac{n}{2}}$ par le lemme et car

$x \mapsto x^{-\frac{n}{2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$= \left[t(\det A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)(\det B)^{\frac{1}{n}}\right]^{-\frac{n}{2}}$

$< t(\det A)^{-\frac{1}{2}} + (1-t)(\det B)^{-\frac{1}{2}}$ car $x \mapsto x^{-\frac{n}{2}}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+$ (car sa dérivée seconde est strictement positive).

donc $D^{-\frac{1}{2}}$ est strictement convexe sur Q_{++} et donc sur $Q_{++} \cap \mathcal{C}$. $\square$.

Théorème des extrema liés

Réf : Gourdon, analyse p317 et 327

Th : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1.

On pose $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $Dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes alors il existe des réels $\lambda_1, \dots \lambda_r$ tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dg_i(a)$

rq les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

dém Étape 1 : Soit $s = n - r$, on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et on écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme (x,y) où $x = (x_1, \dots x_s) \in \mathbb{R}^s$ et $y = (y_1, \dots y_r) \in \mathbb{R}^r$. On pose $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.

. Comme les $Dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes et que l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, on a nécessairement que $r \leq n$

De plus si $r = n$ alors $(Dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ donc on a le résultat voulu.

On peut donc supposer $r \leq n-1$ et donc $s \geq 1$.

Étape 2 : Application du théorème des fonctions implicites

On considère la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & & & & & \end{pmatrix}$. On a que $\operatorname{rg} M_1 \leq r$ et comme les $Dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes on a $\operatorname{rg} M_1 = r$

On peut donc en extraire une sous-matrice de taille $r \times r$ inversible. Quitte à renommer les variables, on peut supposer que $\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0$.

On considère $g = (g_1 \dots g_r) : (x,y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ \vdots \\ g_r(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r$ C^1, on a donc par hypothèse $D_y g(a)$ est inversible et $g(a) = 0$ (car $a \in \Gamma$)

Ainsi par le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\varphi (\varphi_1, \dots \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe C^1 tels que

$$\left(x \in U', (x,y) \in \Omega \text{ et } g(x,y) = 0 \right) \iff \left(y = \varphi(x) \right).$$

En d'autres termes sur un voisinage de a, les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$

De plus, comme $a \in \Gamma$, $\beta = \varphi(\alpha)$.

Étape 3 : On pose $\psi = (\psi_1, \dots \psi_n) : x \in U' \mapsto (x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n$, on a donc par ce qui précède $\psi(x) \in \Gamma$

On considère $h = f \circ \psi$ sur U'. Comme $h(\alpha) = f(\psi(\alpha)) = f(a)$, h admet un extremum local en $x = \alpha$

Donc $\forall 1 \leq i \leq s$, $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f(\psi(\alpha))}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(\psi(\alpha))}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$

Or comme $a \in \Gamma$, $\psi(\alpha) = a$ $\underset{(\alpha,\beta)}{}$ et $\forall 1 \le j \le s$, $\dfrac{\partial \psi_j(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \delta_{ij}$ et $\forall 1 \le j \le R$ $\dfrac{\partial \psi_j(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \dfrac{\partial \varphi_j(\alpha)}{\partial \alpha_i}$

donc $\forall 1 \le i \le s$ $\quad 0 = \dfrac{\partial f(a)}{\partial a_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{R} \dfrac{\partial \varphi_j(\alpha)}{\partial \alpha_i} \dfrac{\partial f(a)}{\partial y_j} \quad (1)$

De plus en écrivant les dérivées par rapport aux α_i, $1 \le i \le s$ de $g(\alpha, \varphi(\alpha)) = 0$, on obtient (par le même calcul) $\forall 1 \le k \le R$, $\forall 1 \le i \le s$ $\quad 0 = \dfrac{\partial g_k}{\partial a_i}(a) + \displaystyle\sum_{j=1}^{R} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_i}(\alpha) \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \quad (2)$

On considère la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial y_R}(a) \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \dfrac{\partial g_R}{\partial x_1}(a) & & & & & \end{pmatrix}$

Par les formules (1) et (2), on a que les s premiers vecteurs colonnes sont des combinaisons linéaires des R derniers. Donc $rg\, M_2 \le R$.

De plus comme $rg\, M_2 = rg\, {}^tM_2$, le rang des vecteurs colonnes de M_2 est égal au rang des vecteurs lignes de M_2 donc les $R+1$ vecteurs lignes de M_2 sont liés.

D'où $\exists \mu_0, \dots, \mu_R$ réels non tous nuls tels que $\mu_0 Df(a) + \mu_1 Dg_1(a) + \cdots + \mu_R Dg_R(a) = 0$.

(car les différentielles et des CL des dérivées partielles)

Or comme les $(Dg_i(a))_{1 \le i \le R}$ sont linéairement indépendants on a $\mu_0 \ne 0$ et donc en posant $\forall 1 \le i \le R$, $\lambda_i = -\mu_i/\mu_0$, on obtient $Df(a) = \displaystyle\sum_{1}^{R} \lambda_i Dg_i(a)$. □

Th des fonctions implicites : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n$, $(a,b) \in U$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la jacobienne $D_y f(a,b)$ est inversible (ie $\det D_y f(a,b) \ne 0$)

Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y :

$\exists V$ voisinage ouvert de a de $\mathbb{R}^s$, W vois. ouvert de b ds $\mathbb{R}^n$ avec $V \times W \subset U$

et une unique application $\varphi : V \to W$ C^1 tq

$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$

De plus, $D_y f(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$.