219

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cadre : E un evn, $A \subseteq E$ non vide. $f : A \to \mathbb{R}$.
On cherche les extrema de f.

Déf 0 : $x^* \in A$ est un point de minimum global (resp local) de f si $f(x^*) \leq f$ sur A (resp au voisinage de x^*)
On parle de minimum strict si l'inégalité est stricte.
Les maxima de f sont définis comme les minima de $-f$

I - Étude locale

1- Conditions du premier ordre

Prop 1 : (Formule de Taylor - Young à l'ordre 1)
Si f est différentiable en x^* alors $f(x^*+h) \underset{h \to 0}{=} f(x^*) + f'(x^*)(h) + o(h)$

Prop 2 : (Équation d'Euler)
Si f est différentiable en $x^* \in \mathring{A}$ et y a un extremum local, alors $f'(x^*) = 0$

Rmq 3 : La réciproque est fausse. $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{array}$ est différentiable en 0 avec $f'(0) = 0$ mais n'a pas d'extremum en 0.

Ex 4 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle\end{array}$
Les extrema de f sont nécessairement solutions de $Ax = b$.

2- Conditions du second ordre

Prop 5 : (Formule de Taylor - Young à l'ordre 2)
Si f est deux fois différentiable en x^*,
alors $f(x^*+h) \underset{h \to 0}{=} f(x^*) + f'(x^*)(h) + \frac{f''(x^*)}{2}(h,h) + o(h^2)$

Prop 6 : Si f est deux fois différentiable en $x^* \in \mathring{A}$
(i) Si x^* minimum local, alors $f''(x)$ est positive.
(ii) Si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*)$ est définie positive, alors x^* est un point de minimum local strict de f.

Rmq 7 : Les réciproques sont fausses :
(i) $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{array}$ n'a pas de minimum local en 0 bien que sa dérivée seconde y soit positive
(ii) $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4\end{array}$ a un minim. local strict en 0 sans que sa dérivée seconde y soit strictement positive.

Ex 8 : Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle\end{array}$
admet au plus un minimum local : la seule solution de $Ax = b$.

3 - Minimisation locale sous contraintes

Th 10 : (Extrema liés). U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [ROU]
$f, g_1, \dots, g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $X = \{x \in U \mid \forall i, g_i(x) = 0\}$.
Si f a en $x^* \in X$ un extremum local, et si $(g_i'(x^*))_{1 \leq i \leq p}$ est libre, alors $(f'(x^*), g_1'(x^*), \dots, g_p'(x^*))$ est liée.

Ex 11 : Les cylindres de $\mathbb{R}^3$ qui maximisent le volume à surface imposée sont ceux de diamètre égal à leur hauteur.

Cor 12 : (Inégalité d'Hadamard). $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.
Alors : (i) $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1,n} \|v_i\|_2$
(ii) égalité $\iff$ $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$

II - Étude globale

1- Utilisation de la compacité

Th 13 : (Bornes atteintes) (Weierstrass)
Une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes

Cor 14 : (Rolle). $-\infty < a < b < +\infty$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$

Déf 15 : Soit $A \subset E$ non bornée. $f : A \to \mathbb{R}$ est dite coercive si $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$

Prop 16 : Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un fermé non borné, $f : F \to \mathbb{R}$ coercive et continue. Alors f admet un point de minimum global.

Cor 17 : (D'Alembert - Gauss)
Tout polynôme complexe non constant admet une racine

2- Utilisation de la convexité

Déf 18 : Soit $C \subseteq E$ un convexe, $\alpha > 0$, $f : C \to \mathbb{R}$.
(i) f est convexe (resp strictement convexe) si $\forall x, y \in C$, $\forall t \in]0,1[$,
$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$ (resp $<$)
(ii) f est α-convexe si $\forall x, y \in C$, $\forall t \in]0,1[$,
$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t) \|y-x\|^2$

Ex 19 : (i) Une semi-norme est toujours convexe, jamais strictement convexe.
(ii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe mais pas α-convexe.
(iii) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
f est α-convexe $\Leftrightarrow$ f est strictement convexe $\Leftrightarrow$ $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Prop 20 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$ où $C \subseteq E$ est convexe.
(i) Si $x^* \in \mathring{C}$, f différentiable, alors :
$f'(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^*$ est un point de minimum local de f sur C $\Leftrightarrow x^*$ est un point de minimum global sur C
(ii) Si f est strictement convexe alors f a au plus un point de minimum
(iii) Si $\dim E < +\infty$, **$C = E$ et f** α-convexe sur E et C^1 alors f admet exactement un point de minimum global sur E.

Ex 21 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. $b \in \mathbb{R}^n$. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
f a un unique point de minimum global : $x^* = A^{-1} b$.

DEV1 [ALL]

Th 22 : (Algorithme du gradient à pas optimal).
Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, α-convexe. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$.
On définit par récurrence $u_{k+1} = u_k - \lambda_k J'(u_k)$ où λ_k est l'unique point de minimum de $\lambda \mapsto J(u_k - \lambda J'(u_k))$ sur $\mathbb{R}$.
Alors $(u_k)_k$ converge vers l'unique point de minimum de J.

II - Cas des espaces de Hilbert

H un Hilbert réel séparable

1- Le théorème de la projection orthogonale

Th 23 : Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non vide, $x \in H$.
Alors il existe un unique point de C minimisant la distance à x, noté $\pi_C(x)$, caractérisé par : $\begin{cases} \pi_C(x) \in C \\ \forall y \in C, \langle x - \pi_C(x) \| \pi_C(x) - y\rangle \geq 0 \end{cases}$

Appli 24 : Résolution d'un système linéaire sur-déterminé au sens des moindres carrés.
Soit $n \geq p$, $A \in M_{np}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Le problème de minimisation $\inf_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - b\|_2$ admet toujours une solution, elle est unique si et seulement si A est injective, et x est solution $\Leftrightarrow A^* A x = A^* b$

Appli 25 : Définition de l'espérance conditionnelle :
Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé, G une sous-tribu de F.
La projection orthogonale de $L^2(\Omega, F, P)$ sur $L^2(\Omega, G, P)$ est appelée espérance conditionnelle sachant G, notée $X \mapsto E[X|G]$.

2- Le théorème de Lax - Milgram

Th 26 : Soit a une forme bilinéaire continue et coercive, $\varphi \in H'$.
(i) Il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, \cdot) = \langle \varphi, \cdot \rangle$ sur H
(ii) Si de a est symétrique alors u est l'unique point de minimum de la fonctionnelle $H \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle$

[BRE]

Appli 27 : Problème de Dirichlet. $I =]0,1[$.
Soit $f \in L^2(I)$. Le problème $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution u dans $H_0^1(I)$, qui est l'unique point de minimum de la fonctionnelle $H_0^1(I) \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (v'^2 + v^2) - \int_0^1 fv$
Si de plus $f \in C(\bar{I})$, alors $u \in C(\bar{I})$, et u est solution du problème au sens classique.

3 - Convexité dans un espace de Hilbert

H un Hilbert réel et séparable.

DEV2

Th 28 : (Banach-Alaoglu) Soit $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors il existe une extraction (n_k) et $x \in H$ telle que $\forall y \in H$, $\langle x_{n_k} | y \rangle \underset{k}{\to} \langle x | y \rangle$

Th 29 : Soit $J : H \to \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ une fonctionnelle continue, coercive et convexe. Alors l'infimum de J est atteint.

[ALL]

Rmq 30 : L'hypothèse convexe est nécessaire comme le montre le contre-exemple
$$\ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (\|x\|^2 - 1)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n|}{n+1}$$
qui est continue, coercive, non convexe, d'infimum 0 non atteint.

Cor 31 : Soit $J : H \to \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ une fonctionnelle différentiable, coercive, strictement convexe.
Alors il existe un unique $u \in H$ point de minimum global de J sur H, qui est l'unique solution de $J'(x) = 0$ sur H.

Appli 32 : Soit $p \in [1, +\infty[$, $I =]0,1[$, $f \in L^2(I)$, $H = H_0^1(]0,1[)$.
Il existe une unique solution $u^* \in H_0^1(]0,1[)$ de $-u'' + |u|^{p-1} u = f$ (au sens des distributions)

4 - Le quotient de Rayleigh en dimension finie

Déf 33 : Pour $A \in H_n(\mathbb{C})$, on note $\lambda_k(A)$ la k-ème plus grande valeur propre de A comptée avec la multiplicité.

[ALL]

On définit
$$R_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|_2^2}$$
le quotient de Rayleigh de A

Th 34 : (min-max) (Courant-Fischer) $\lambda_k(A) = \min\limits_{\substack{F \leq \mathbb{C}^n \\ \dim F = k}} \max\limits_{F \setminus \{0\}} R_A$

Cor 35 : (Weyl) Pour $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$,
$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Prop 36 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0$, on définit par récurrence :
$(A - \mu_{k-1} I_n) y_k = x_{k-1}$, $x_k = y_k / \|y_k\|$, $\mu_k = R(x_k)$.
La suite $(\mu_k)_k$ converge cubiquement vers une valeur propre de A

IV - L'équation d'Euler-Lagrange et la brachistochrone

Déf 37 : On appelle Lagrangien une application $\mathcal{L} :]0,1[\times U \times V \to \mathbb{R}$, où U, V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, qui est intégrable par rapport à sa 1ère variable, et de classe C^1.
La fonctionnelle associée à $\mathcal{L}$ est
$$J : C^2([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \int_0^1 \mathcal{L}(x, u(x), u'(x))\,dx$$
L'équation d'Euler-Lagrange associée à $\mathcal{L}$ est
$$\partial_2 \mathcal{L}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \partial_3 \mathcal{L}(x, u(x), u'(x)) = 0$$

Prop 38 : Si $u \in C^2([0,1])$ minimise localement J, alors u vérifie l'équation d'Euler-Lagrange.

Prop 39 : (Réciproque partielle).
Soit $\mathcal{L} :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}_+$ un Lagrangien, indépendant de x, différentiable, strictement convexe, à valeurs positives, tel que $\partial_2 L$ est bornée.

[FIG]

Alors une solution de l'équation d'Euler-Lagrange minimise globalement et strictement la fonctionnelle J.

Déf 40 : (Problème de la brachistochrone)
Le problème de la brachistochrone est la recherche d'une courbe de l'espace qui minimise le temps de parcours d'un mobile ponctuel entre deux points.
Cela revient à minimiser la fonctionnelle ~~$J : C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$~~
$$J : E = \{f \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1]) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\} \to \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$$
$$f \longmapsto \int_0^1 \sqrt{\frac{f'^2 + 1}{f}}$$

Th 41 : Le problème de la brachistochrone admet une unique solution dans l'espace E. La fonction solution est un arc de cycloïde, dont un paramétrage est :
$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{K}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = \frac{K}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Annexe 1 : convexité et minimum :

$f : K \to \mathbb{R}$, K convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

[DEH]

	Existence	Unicité
f convexe	Non ($x \mapsto x$)	Non ($x \mapsto 0$)
f strictement convexe	Non ($x \mapsto e^x$)	oui
f α-convexe et C^1	oui	oui

Annexe 2 : Fonctions quadratiques de $\mathbb{R}^n$ et minimum

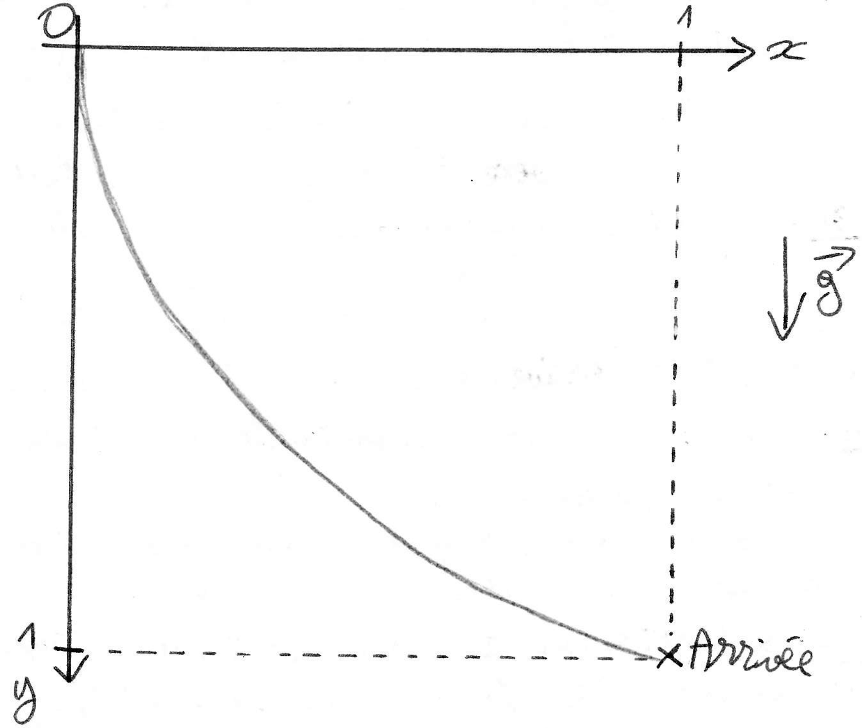
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

où $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = \min(Sp(A))$

[DEH]

	f non minorée	existence non unique du minimum	existence et unicité du minimum
$\lambda > 0$			X
$\lambda < 0$	X		
$\lambda = 0$, $b \notin Im(A)$	X		
$\lambda = 0$, $b \in Im(A)$		X	

Annexe 3 : La brachistochrone :



[FIG]

Bibliographie :

- [ALL] Allaire, Analyse numérique et optimisation
- [ROU] Rouvière, petit guide de calcul différentiel
- [FIG] Figalli, Autour des inégalités isopérimétriques
- [BRE] Brézis, Analyse fonctionnelle
- [JSR] Jean Saint Raymond, topologie, calcul diff
- Cours option B, Thibaut Deheuvels [DEH]