249

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

Déf 1 [Rou] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
Soit $X \subseteq E$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$:
- f admet un maximum global en a si $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in X$
- f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in V \cap X$.
- Les définitions de minimum global et local se déduisent en inversant le sens des inégalités
- On parle de maximum ou minimum strict si les inégalités sont strictes.

Sauf mention contraire, par la suite E désigne un $\mathbb{R}$-evn.

I Critères généraux d'existence et d'unicité

I.1) Lorsque E est compact

Prop 2 [Gou] Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ une appli. continue, où (E,d) est métrique compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e $\exists c, d \in E$ tels que $f(c) = \inf_{x \in E} f(x)$, $f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$

App 3 [Gou] (Thm de point fixe sur un compact)
Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application continue telle que $\forall (x,y) \in E^2$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe et la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec x_0 quelconque converge vers ce point fixe.

Ex 4 La fonction sinus sur $[0, \pi]$ admet un unique point fixe (en 0).

C-Ex 5 Les résultats précédents sont faux si E n'est que complet, prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = \frac{1}{1+x} + x$ si $x \geq 0$

App 6 [Gou] Soit (E,d) un espace métrique compact. Soient K_1, K_2 deux compacts de E. Il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$
Si : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle. Soit K un compact et F un fermé, il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x,y) = d(K,F)$

App 7 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ coercive

Si X est un fermé de E alors f est minorée sur X et atteint son minimum.

I.2) Avec des fonctions convexes

Déf 8 [Obj] Soient C un convexe de E et f une application de C dans $\mathbb{R}$, f est une application convexe sur C si :
$\forall (x,y) \in C^2$, $\forall t \in [0,1]$ $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$. f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte.

Prop 9 (Caractérisation des fonctions convexes). Soit U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$:
- Si f est différentiable sur U alors f est convexe sur U ssi $f(y) \geq f(x) + df(x)(y-x)$ pour tout $x, y \in U$.
- Si f est deux fois différentiable sur U alors f est convexe sur U ssi $D^2 f(x) \geq 0$ pour tout $x \in U$.

Prop 10. Soit C un convexe non vide et $f : C \to \mathbb{R}$ une application convexe sur C. Si f admet un minimum local en $a \in C$ alors ce minimum est global.

Prop 11 [Obj] Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une appli. strictement convexe sur C convexe. Il existe au plus un point $a \in C$ minimisant f sur C.

Exemple 12 (Utilisation conjointe de convexité et de compacité). Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. La fonction $f : M \to MA + MB + MC$ admet un unique minimum, appelé point de Fermat.

I.3) Dans un Hilbert

Thm 13 (Projection sur un convexe fermé) Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subseteq H$ un convexe fermé non vide :
1. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = dist(x, C)$
2. Ce point est caractérisé par $P_C(x) \in C$ et $Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$, $\forall z \in C$
3. $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne
4. Si F est un sev fermé de H, $\forall x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \perp F$

App 14 : Etant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$, avec des x_i non tous égaux entre eux, il existe des nombres λ et μ uniques, qui rendent minimum la somme $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$
La droite d'équation $y = \lambda x + \mu$ est appelée la droite des moindres carrés.

I.4) Holomorphie

Thm 15 (Principe du maximum) [Obj] Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

C-Ex 16 (Principe du minimum) La fonction $f: z \mapsto z$ sur le disque ouvert $D(0,1)$, est telle que $|f|$ admet un minimum local mais f n'est pas constante.

Rem 17 Si f ne s'annule pas et est holomorphe on peut utiliser $\frac{1}{f}$ pour obtenir des propriétés de minima.

App 18 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| \geq 2$ sur le cercle unité, alors f s'annule sur le disque unité.

II) Utilisation du calcul différentiel

II.1) Condition du premier ordre

Thm 19 (Condition nécessaire d'extremum local) [Rou] Si f admet en $a \in \mathcal{U}$ ouvert de E un extremum local et si f est différentiable en a, alors $Df(a) = 0$

C-Ex 20 Si $\mathcal{U}$ n'est pas ouvert, on n'a pas forcément le résultat, par exemple l'identité sur $[0,1]$

C-Ex 21 Il ne s'agit que d'une condition nécessaire, par exemple $f: x \mapsto x^3$

Prop 22: Soit f une fonction convexe différentiable en $a \in \mathcal{U}$ ouvert de E. a est un extremum global de f ssi: $Df(a) = 0$.

App 23 (Thm de Rolle) [Gou] Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant : - f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

App 24 (Point de Fermat) Le point de Fermat est celui pour lequel les angles qu'il forme avec les sommets du triangle valent $\frac{2\pi}{3}$

Rem 25. On peut généraliser le problème du point de Fermat par le problème euclidien de Steiner, étant donné un ensemble fini S de points du plan, trouver
- un ensemble fini de points du plan (appelés points de Steiner)
- un ensemble de segments E d'extrémité dans $S \cup T$

tels que : - $(S \cup T, E)$ forme un graphe connexe
- la somme des longueurs des segments de E soit minimale

Thm 26: Le problème euclidien de Steiner est NP-difficile

Rem 27: On peut généraliser ce problème à la géométrie sphérique.

II.2) Condition du second ordre

Thm 28 [Rou] Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $a \in E$ et $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a :

1. Condition nécessaire (pas suffisante) : si f admet en a un minimum local et si $D^2f(a)$ existe, alors nécessairement $Df(a) = 0$, et $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive, i.e $D^2f(a)(h,h) \geq 0 \ \forall h \in E$

2. Condition suffisante (pas nécessaire) : si E est de dimension finie, si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive (i.e $D^2f(a)(h,h) > 0 \ \forall h \neq 0$) alors f admet en a un minimum local strict.

C-Ex 29. Considérons $f: (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Le seul point a tel que $Df(a) = 0$ est en $(0,0)$, $D^2f(a)$ est positive mais pas définie positive. $(0,0)$ n'est pas un extremum

C-Ex 30 - $g: (x,y) \mapsto x^2 + y^4$ admet un minimum strict en $(0,0)$ mais ne vérifie pas la condition 2.

App 31. Soit $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $Df(a) = 0$ pour un $a \in \mathcal{U}$.

Posons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en a
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en a
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum en a
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure

(voir annexe)

Jusqu'alors, notre variable était "libre".

II.3) Sous contraintes

Thm 32 (Extrémalités) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \dots, g_m$ des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $C = \{x \in U^n / g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$.
Si a est un extremum local de f dans C, si f est différentiable en a et si les différentielles $Dg_1(a), \dots, Dg_m(a)$ sont linéairement indépendantes alors il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que
$$df(a) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Dg_i(a) = 0$$

App 33 [Rouv] Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds

App 34 Le parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné (emballage le plus économique) est le cube.

App 35. S_0 est l'ensemble des éléments de S qui minimise la norme euclidienne canonique

III) Algorithmes d'approximation

Def 36 : On dit que la suite (u_n) converge quadratiquement vers a ssi il existe $0 < \lambda < \min\left(1, \frac{1}{|u_0 - a|}\right)$ tel que $|u_{n+1} - a| \leq \lambda |u_n - a|^2$
On a alors $|u_n - a| \leq (\lambda |u_0 - a|)^{2^n}$

Thm 37 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u_0 \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers a de manière quadratique.
Si on suppose de plus que f est convexe sur I et que $f'(a) > 0$, alors le résultat précédent est vrai pour tout $u_0 \in I \cap]a, +\infty[$.

On étudie désormais les méthodes de gradient, qui sont une famille d'algorithmes de recherche de minimum local très utilisés en pratique.

Def 38 (méthode du gradient à pas fixe).
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fixe un pas $\alpha > 0$, une tolérance $\varepsilon > 0$ et un point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On itère l'algorithme en formant à chaque étape $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$. Si $\|\nabla f(x_n)\| < \varepsilon$, l'algorithme s'arrête.

Le pas fixé étant peu flexible, on préfèrera l'algorithme à pas optimal :

Def 39 : (méthode du gradient à pas optimal).
À chaque étape n, le pas α_n est calculé de sorte à minimiser la quantité $x_n - \alpha_n \nabla f(x_n)$.

Rq 40 : On ramène donc chaque étape de l'algorithme à un problème d'optimisation en 1D, ce qui peut être très lourd en calculs. Il existe cependant un cas particulièrement favorable et courant.

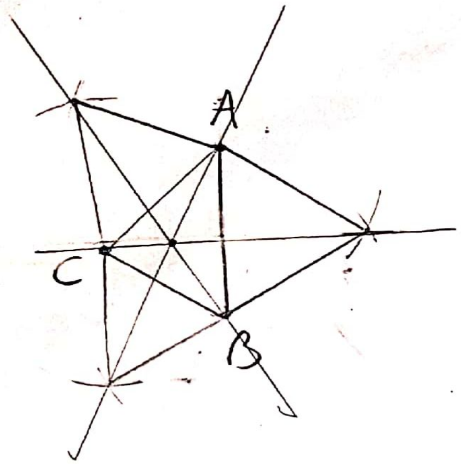
Thm 41 : (algorithme du gradient à pas optimal pour fonctions quadratiques)
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On souhaite minimiser $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle$ avec l'algorithme du gradient à pas optimal.
On a alors :
$$-\alpha_k = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \quad \text{où } d_k = \nabla f(x_k)$$
- en notant x_* le minimum de f, et $c(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$,

on a : $\forall k \geq 1$, $\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{c(A) - 1}{c(A)} \|x_k - x_*\|$

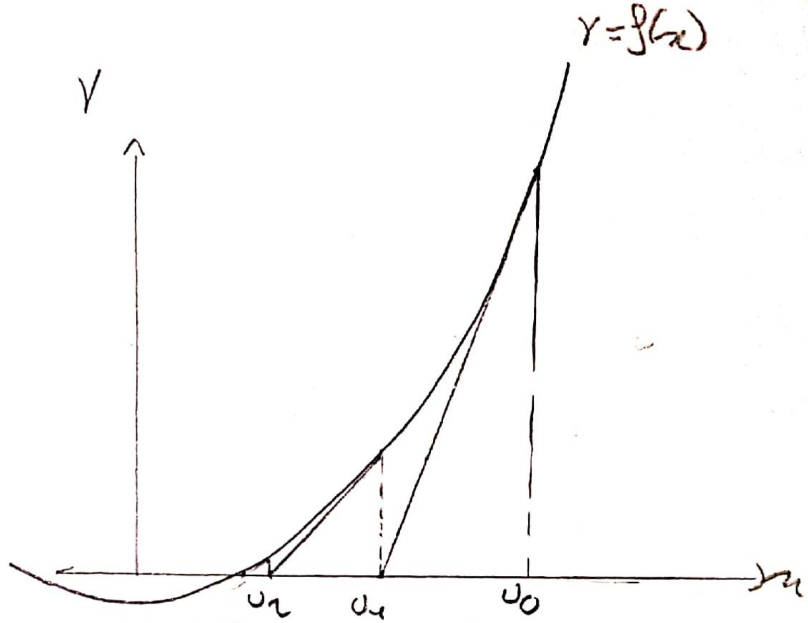
Donc la suite x_k converge systématiquement vers x_*.

Rq 42 : des majorations plus fines de la convergence grâce à l'inégalité de Kantorovitch existent.

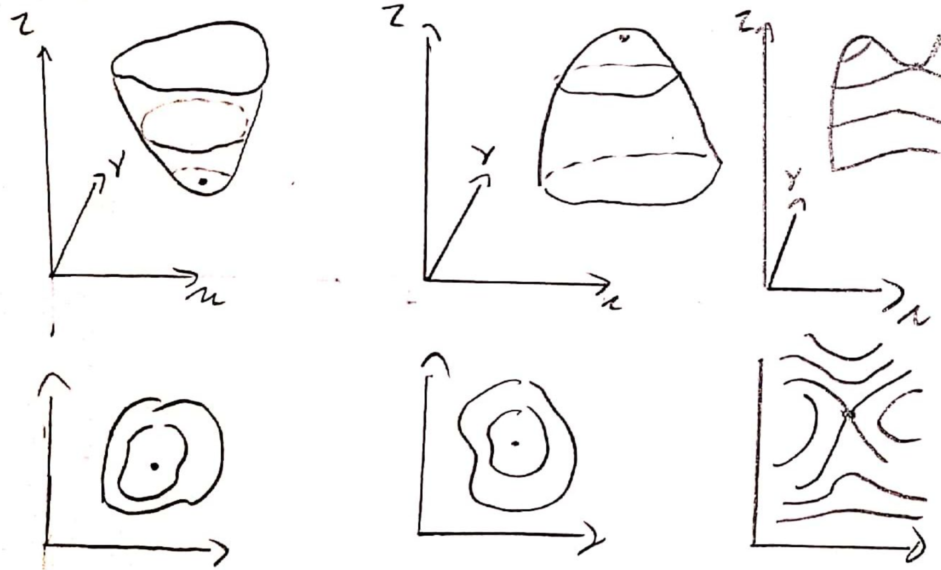
Rq 43 : L'algorithme convergera d'autant plus vite que la matrice A est bien conditionnée, i.e. proche d'une homothétie. (cf annexe).



Point de Format



Méthode de Newton

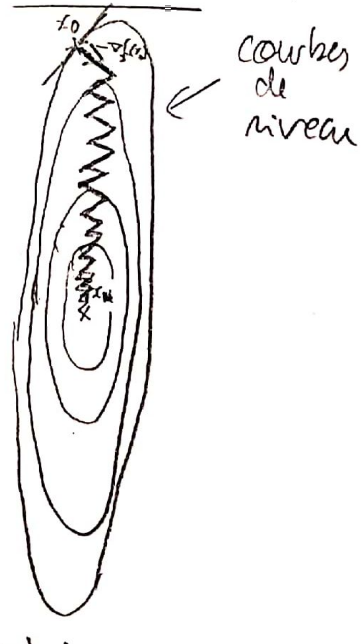


$Df(a) = 0$
$D^2f(a) + +$

$Df(a) = 0$
$D^2f(a) - -$

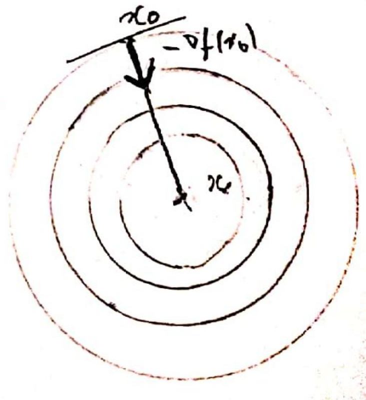
$Df(a) = 0$
$D^2f(a) + -$

Matrice mal conditionnée



calcul long

Matrice bien conditionnée



l'algorithme finit en très peu d'étapes