219

Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

On considère E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$.

I) Existence et recherche d'extrema

1) Extrema globaux et continuité

Déf 1 : Soit $a \in E$. $f(a)$ est un minimum (resp. maximum) global de f si : $\forall x \in E$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$). On parle de minimum (resp. maximum) strict si les inégalités sont strictes.

Ex 2 : $x \mapsto x^2$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Prop 3 : L'image de tout compact d'une fonction continue est un compact. En particulier, toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Ex 4 : Si K_1 et K_2 sont deux compacts de E, alors $\exists (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2 / d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Cor 5 : En dimension finie, les normes sont équivalentes.

2) Extrema locaux et différentiabilité

Déf 6 : Soit $a \in E$. $f(a)$ est un minimum (resp. maximum) local pour f si $\exists r > 0 / \forall x \in B(a,r)$, $f(x) \geq f(a)$ (resp $\leq$). On parle de minimum (maximum) strict si les inégalités sont strictes.

Ex 7 : $x \mapsto x^3 - x$ admet un minimum (resp. maximum) local mais non global en $\sqrt{3}/3$ (resp. $-\sqrt{3}/3$).

Déf 8 : Soit $a \in E$ et f différentiable en a. On dit que a est un point critique de f si $Df(a) = 0$.

Prop 9 : Si a est un extremum local de f, alors $Df(a) = 0$.

Ex 10 : $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ admet un minimum en $(0,0)$.

Contre-ex 11 : $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un point critique en $(0,0)$ qui n'est pas un extremum. On parle ici de point col.

Th 12 : Soit $a \in E$, f deux fois différentiable en a et $\dim E < +\infty$.
(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) local en a, alors $D^2 f(a)$ est positive (resp. négative)
(ii) Si $D^2 f(a)$ est définie positive (resp. négative), alors f possède un minimum (resp. maximum) local strict en a.
(iii) Si $D^2 f(a)$ possède deux valeurs propres de signe opposé, alors a est un point col.

Rq 13 : Si $D^2 f(a)$ est dégénérée, on ne peut pas conclure quant à la nature de a.

Ex 14 : $(x,y) \mapsto x^3 + y^3$ admet un point critique en $(0,0)$ qui n'est pas un extremum. Sa hessienne en $(0,0)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 15 : Toute fonction constante sur $\mathbb{R}^2$ a une hessienne nulle en $(0,0)$ mais $(0,0)$ est un extremum.

II) Convexité

1) Généralités sur les fonctions convexes

Déf 16 : f est convexe si :
$\forall x, y \in E$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$
f est dite concave si $-f$ est convexe.

Prop 17 : Si $\dim(E) < +\infty$, f convexe $\Rightarrow$ f continue.

Prop 18 : Si f est deux fois différentiable, alors f est convexe ssi $\forall x \in E$, $D^2 f(x)$ est positive.

Contre-ex 19 : $x \mapsto |x|$ est convexe mais non différentiable en 0.

Prop 20 : Si f est convexe, tout minimum local est global. Si f est concave, tout maximum local est global.

2) Espaces de Hilbert

Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Th 21 : (Projection sur un convexe fermé)
Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non vide. Pour tout $x \in C$ il existe un unique $p_C(x)$ tel que $d(x,C) = \|x - p_C(x)\|$.
De plus, $p_C(x)$ est caractérisé par $\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \forall y \in C, \ \mathrm{Re}(\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle) \leq 0 \end{cases}$

Rq 22 : H préhilbertien et C complet suffisent.

Cor 23 : Si $C = F$ est un s e v fermé non vide de H, p_F est la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$.

Ex 24 : $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) = \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|_2^2 = \frac{1}{180}$

Contre-ex 25 : Avec $C = \{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1]) / f(0) = 0 \}$ et $f \equiv 1$, $d_\infty(f, C) = 1 = \|f - g\|_\infty \ \forall g \in C$. ($C$ non fermé, pas unicité)

Contre-ex 26 : Avec $H = (\mathcal{C}^0([0,1]), \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2})$ et $F = \{ f \in L^2 / \int_0^{1/2} f = 0 \} \cap H$
on a $\forall f \in H \setminus F, \forall g \in F, \|f - g\|_{L^2} > d(f, F)$ (H non complet)

Th 27 : (Représentation de Riesz) : Soit $\phi \in H'$. Alors :
$\exists ! f \in H / \forall g \in H, \phi(g) = \langle f, g \rangle$ et $\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H$.

DEV 1

Th 28 : (Banach-Alaoglu) : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$.
Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement, i.e :
$\exists f \in H / \forall g \in H, \langle f_{\varphi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle f, g \rangle$

Th 29 : Soient $C \subseteq H$ un convexe fermé non vide et $J : C \to \mathbb{R}$.
On suppose J continue, convexe et coercive. Alors J admet un minimum sur C.

App 30 : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geq 1$. Alors $-u'' + |u|^{p-1} u = f$ admet une unique solution dans $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.

Th 31 : (Stampacchia) : Soient $C \subset H$ convexe fermé non vide, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ continue bilinéaire coercive et $\varphi \in H'$.
Alors : $\exists ! u \in C / \forall v \in C, \ a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$
Si de plus a est symétrique :
$\exists ! u \in C / \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in C} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right)$.

Th 32 : (Lax-Milgram) : Soient $a : H \times H \to \mathbb{R}$ continue bilinéaire coercive et $\varphi \in H'$.
Alors : $\exists ! u \in H / \forall v \in H, \ a(u,v) = \varphi(v)$
Si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par : $\begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right) \end{cases}$.

App 33 : Soient $\alpha \in L^\infty(0,1)$, $0 < \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$, et $f \in L^2(0,1)$.
Alors le problème de Dirichlet $\begin{cases} -(\alpha u')' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$.

III) Recherche d'extrema et méthodes numériques

Th 34 : (Darboux) : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, $f'(I)$ est un intervalle.

Th 35 : (Dichotomie) : Soient $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
On suppose $f'(a) f'(b) < 0$.
Alors : il existe $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$. De plus, si on définit :
- $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{1}{2}(a+b)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$: * Si $f'(c_n) = 0$: on arrête l'algorithme
  * Si $f'(c_n) f'(b_n) < 0$: $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$

* Si $f(c_n)f(a_n)<0$: $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=c_n$, $c_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|c_n-z_0|\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}$

Rq 36 : Cette méthode permet de trouver les points critiques de f et donc ses extremas potentiels.

Th 37 : (Méthode de gradient) : Soient $A\in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $b\in\mathbb{R}^n$. On considère l'application $J : x\in\mathbb{R}^n\mapsto\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle b,x\rangle$.

Alors si $\alpha\in\left[0,\frac{2}{\max(Sp(A))}\right[$, la suite définie par $\begin{cases}x_0\in\mathbb{R}^n\\ x_{n+1}=x_n-\alpha\nabla J(x_n)\end{cases}$ converge pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Th 38 : (Extrema liés) : Soient $f,g_1,\dots,g_r$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Gamma=\{x\in U / g_1(x)=\dots=g_r(x)=0\}$. On suppose qu'il existe $a\in\Gamma$ tel que $f_{|\Gamma}$ admette un extrema en a, et $(Dg_1(a),\dots,Dg_r(a))$ soit libre.

Alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}$ / $Df(a)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i Dg_i(a)$.

App 39 : (Théorème spectral) : Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de E de vecteurs propres de u.

V) Etude du module de fonctions holomorphes

Dans cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Prop 40 : (Formule de Cauchy) : Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe et Γ un chemin fermé dans Ω.

Alors : $\forall a\in D\setminus\Gamma$, $f(a)\times\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-a}dz$, où $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{1}{z-a}dz$.

Prop 41 : (Principe du maximum) : Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est holomorphe, $\forall b\in\Omega$, $|f(b)|\leq\max_{z\in\partial D(b,r)}|f(z)|$ avec $\overline{D}(b,r)\subset\Omega$.

Cor 42 : Les fonctions constantes sont les seules fonctions holomorphes admettant un maximum sur $\mathbb{C}$.

Cor 43 : Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe. Si $|f|$ admet un minimum local sur Ω, alors celui-ci est nul.

App 44 : (d'Alembert-Gauss) :

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

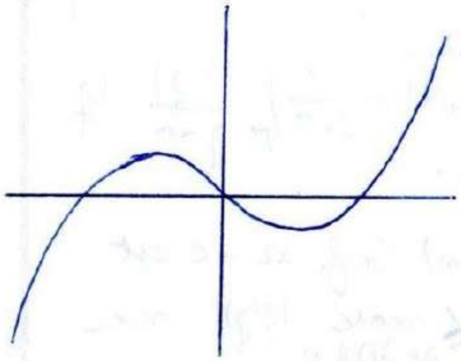

figure 1 : $x \mapsto x^3 - x$

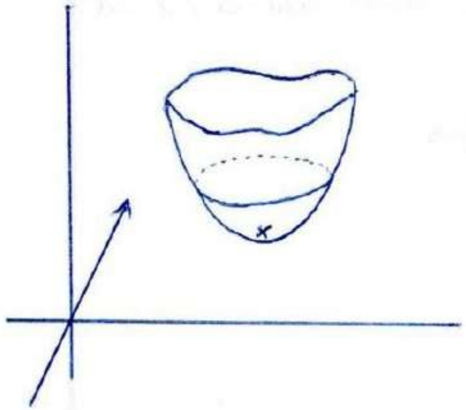

figure 2 : $(x,y) \mapsto x^2+y^2$

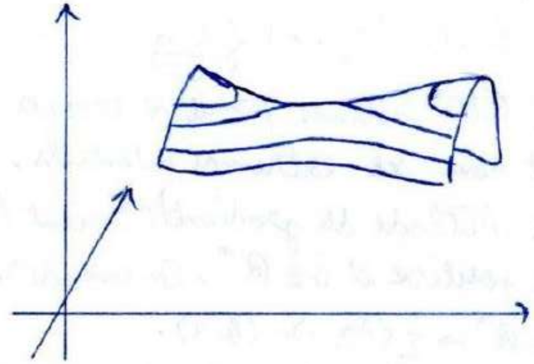

figure 3 : $(x,y) \mapsto x^2-y^2$