220 — Equations différentielles $X' = F(t,X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

I°) Equations différentielles [ZQ] + [Dem]

1) Existence et unicité de solutions

Soit $J \times \Omega := U$ avec $J \subset \mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$.
Soit $F : U \to \mathbb{R}^m$ continue. On considère l'ED :

$$y' = F(t,y), \quad t \in \mathbb{R}, \ y \in \Omega \qquad (E)$$

<u>Pb de Cauchy</u> : Etant donné $(t_0, y_0) \in U$, le pb de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E) définie sur un intervalle I telle que $t_0 \in \mathring{I}$ et $y(t_0) = y_0$.
On note ce problème : (P) $\left\| \begin{array}{l} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$

<u>Rappels</u> : * une solution de (P) est dite maximale si elle ne peut être prolongée en une solution de (P) définie sur un intervalle plus grand.
* une solution de (P) est globale si $I = J$.

<u>Rq 1</u> : sol globale $\Rightarrow$ sol maximale, mais la réciproque est fausse.

<u>Thm 2</u> : [Cauchy-Lipschitz]
Soit $F : J \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ continue et localement lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable. Pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, il existe une unique solution à (P) définie sur $I \subseteq J$ ouvert contenant t_0.

<u>Ex 3</u> : $\left\| \begin{array}{l} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{array} \right.$ admet une unique solution définie sur $[0, \frac{1}{y_0}[$ donnée par : $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$.
Cette solution est maximale, mais non globale.

<u>Thm 4</u> : [Péano-Arzela]
Si F est seulement continue, il existe une solution maximale (non nécessairement unique) à (P).

<u>Ex 5</u> : $\left\| \begin{array}{l} y' = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$ admet 0 et $t \mapsto t^3$ comme solutions maximales, qui sont distinctes.

<u>Rq 6</u> : Le théorème de Péano est vrai en dimension finie, mais ne l'est plus en dimension infinie.

<u>Ctr-ex 7</u> : $c_0 = \{(x_n)_n, \ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\}$, muni de $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Soit

$$F : \begin{array}{l} c_0 \longrightarrow c_0 \\ x = (x_n)_n \longmapsto y = (y_n)_n = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_n \end{array}$$

Le pb de Cauchy $\left\| \begin{array}{l} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$ n'admet pas de solution $y \in C^1([0,T], c_0)$

2) Résultats pour l'étude des solutions

<u>Lemme 8</u> : [Gronwall]
Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ et $c \in [a,b]$. Supposons qu'il existe des constantes positives A, B telles que : $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \leq A + B \left| \int_c^t f(s) ds \right|$
Alors : $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \leq A e^{B|t-c|}$.

<u>Thm 9</u> : [Principe de majoration à priori]
Soit $F :]a,b[\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue et localement lipschitzienne en sa 2ème variable, de sorte qu'il existe une unique solution (y, I) à (P), avec $I =]T_-, T^+[$. Alors :
$\left\| \begin{array}{l} \text{ou bien } T^+ = b \\ \text{ou bien } T^+ < b \text{ et } \lim_{t \to T^+} \|y(t)\| = +\infty \end{array} \right.$ (idem en T_-)

<u>Cor 10</u> : Sous les mêmes hypothèses sur F, et si de plus il existe des fonctions $c, k : J \to \mathbb{R}^+$ continues telles que $y \mapsto F(t,y)$ vérifie : $\|F(t,y)\| \leq c(t) + k(t)\|y\|$ (croissance linéaire à l'∞)
Alors la solution à (P) est globale.

<u>App 11</u> : La solution de $y'(t) = A(t) y(t) + B(t)$, où $A(t), B(t)$ sont des matrices à coefficients continus sur J, est globale.

<u>Ex 12</u> : Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la solution de $y'(t) = y(t) \sin(e^{y(t)}) + e^{t^2} \dfrac{y^3(t)}{1 + y^2(t)}$ est globale.

II°/ Stabilité des systèmes différentiels autonomes

Cadre : (S) $y'(t) = F(y(t))$, où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1.

1) Définitions [ZQ]

Déf 13 : Un point $\left|\begin{array}{l}\text{d'équilibre}\\ \text{critique}\end{array}\right|$ du système est un point y_0 tq $F(y_0)=0$

Déf 14 : Un point d'équilibre y_0 est dit :

* stable si $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$: si y est sol de (S) qui à un instant t_0 vérifie $\|y(t_0) - y_0\| < \delta$, on a :
  - → y est définie pour tout $t \geq t_0$
  - → $\|y(t) - y_0\| < \varepsilon$, pour tout $t \geq t_0$

(voir illustrations en annexe !)

* asymptotiquement stable si :
  - → y_0 est stable
  - → $\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - y_0\| = 0$
* instable s'il n'est pas stable.

2) Cas des E.D. linéaires à coeffs constants [Dem]

Ici, on étudie $Y' = AY$ avec $Y \in \mathbb{C}^m$, $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$

Thm 15 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les vp complexes de A. Alors les solutions :

* sont asymptotiquement stables ssi $\forall 1 \leq j \leq m$, $Re(\lambda_j) < 0$
* sont stables ssi $\forall 1\leq j \leq m$, ou bien $Re(\lambda_j) < 0$, ou bien $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.
* sont instables si $\exists 1 \leq j \leq m$ tel que $Re(\lambda_j) > 0$.

Rq 16 : S'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < -\mu$, alors il existe $k = c^{te}$ telle que $\forall t \geq 0$, $\|e^{tA}\| \leq k e^{-\mu t}$.

Cas particulier 17 : Plaçons-nous dans le cas de la dimension 2 avec $\left\|\begin{array}{l} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{array}\right.$, où $M = \binom{x}{y}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det A \neq 0$, de sorte que $(0,0)$ est l'unique point critique.

↳ Illustrations des courbes intégrales en fonction des vp de A (voir annexe !)

3) Le cas non constant

Thm 18 : [Liapunov] [DVPT 1]

On considère le système $\left\|\begin{array}{l} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$ avec $\left|\begin{array}{l} F \text{ de classe } C^1 \\ x_0 \text{ tq } F(x_0) = 0 \end{array}\right.$

On lui associe le système linéarisé $z'(t) = DF(x_0) z(t)$ autour de 0. Soit λ_j, $j = 1, \dots, m$ les vp de $DF(x_0)$. Alors :

* si $\forall j$, $Re(\lambda_j) < 0$, x_0 est asymptotiquement stable
* si $\exists j$, $Re(\lambda_j) > 0$, " instable
* si $\forall j$, $Re(\lambda_j) \leq 0$ et $\exists j_0$ tq $Re(\lambda_{j_0}) = 0$, on ne peut pas conclure

Ex 19 : $\left\|\begin{array}{l} x' = -y + \varepsilon(x^2+y^2)x \\ y' = x + \varepsilon(x^2+y^2)y \end{array}\right.$: $(0,0)$ est l'unique point critique

* si $\varepsilon < 0$, $(0,0)$ est asymptotiquement stable
* si $\varepsilon = 0$, " stable
* si $\varepsilon > 0$, " instable

(Liapunov ne permet pas de conclure ici, on l'étudie "à la main")

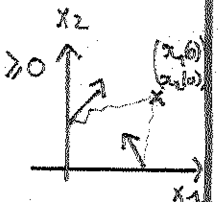
Ex 20 : $\left\|\begin{array}{l} x' = x^2 + y \\ y' = xy + 2y^2 + x \end{array}\right.$: $(0,0)$ est point critique instable

III°/ Exemples d'études qualitatives

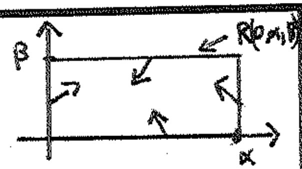
[MP] 1) Positivité et invariance (dim = 2, sur un exemple)

On s'intéresse au problème $\left\|\begin{array}{l} x_1' = g_1(x_1, x_2) \\ x_2' = g_2(x_1, x_2) \\ x_1(0) \geq 0 \\ x_2(0) \geq 0 \end{array}\right.$

Alors $\forall t \geq 0$, x_1, x_2 positifs $\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} g_1(0,y) \geq 0 \\ g_2(x,0) \geq 0 \end{array}\right.$, $\forall x, y \geq 0$



* <u>Rectangle invariant</u>:



On s'intéresse au même problème, et ici, pour $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\forall t\geq 0,\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix}\in R(0,\alpha,\beta) \iff \left|\begin{array}{l} g_1(0,y)\geq 0 \\ g_2(x,0)\geq 0\end{array}\right. \text{ et } \left|\begin{array}{l} g_1(\alpha,y)\leq 0 \\ g_2(x,\beta)\leq 0\end{array}\right.,\ \forall \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\in R(0,\alpha,\beta)$$

2) <u>Etude d'un système Lotka-Volterra</u> [Mad]

DVPT 2

On considère le système :
$$\left\|\begin{array}{l} M'(t) = M(t)\left[a - bL(t)\right] \\ L'(t) = L(t)\left[-c + d\,M(t)\right] \\ M(0) = M_0 > 0 \\ L(0) = L_0 > 0 \end{array}\right.$$
avec $a,b,c,d>0$.

Alors :

*) $\forall t\geq 0$, $M(t)$ et $L(t)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$.

**) Les applications $t\mapsto M(t)$ et $t\mapsto L(t)$ sont copériodiques.

***) Les valeurs moyennes de M et L sur une période sont indépendantes de M_0 et L_0.

3) <u>Existence de solutions périodiques</u> [Gou]

<u>Thm 21</u>: [Poincaré-Bendixson] (admis)

Supposons qu'une solution $x=x(t), y=y(t)$ du système
$$\left\|\begin{array}{l} dx/dt = f(x,y) \\ dy/dt = g(x,y)\end{array}\right.$$
reste dans une région bornée du plan qui ne contient aucun point d'équilibre du système.
Alors, la trajectoire se rapproche d'une courbe fermée qui est elle-même la trajectoire d'une solution périodique du système.

<u>Ex 22</u>: La couronne $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 2\}$ est un compact positivement invariant de l'équation différentielle
$$\left\|\begin{array}{l} x' = x\left(1-2x^2-\frac{1}{2}y^2\right)-y \\ y' = y\left(1-2x^2-\frac{1}{2}y^2\right)+x\end{array}\right.$$

<u>Références</u>:

→ Zuily-Queffélec : "Analyse pour l'agrégation"

→ Demailly : "Analyse numérique et équations différentielles" DVPT

→ Rouvière : "Petit guide de calcul différentiel ..."

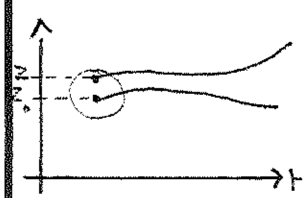
→ Madère : "Développements d'analyse pour l'agrégation" DVPT

→ Gourdon : "Equations différentielles : théorie, algorithme, ..."

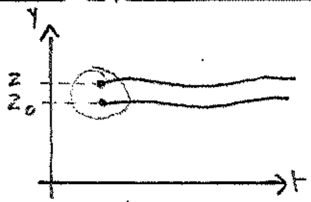
→ Michel Pierre : "Complément de cours (C.S)"

↳ lui demander pour des références au top sur la positivité et l'invariance ...

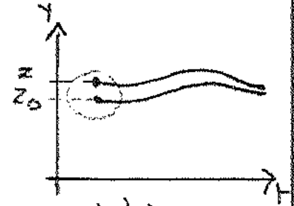
Stabilité, stabilité asymptotique et instabilité



Solution instable.



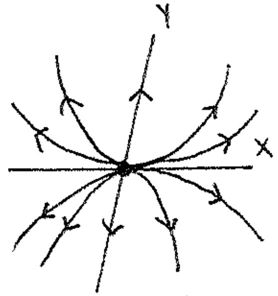
solution stable.



Solution asymptotiquement stable.

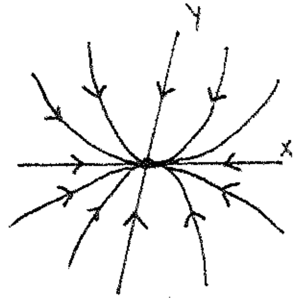
Courbes intégrales d'un champ de vecteur (dim=2)

a) Les vp λ_1, λ_2 de A sont réelles



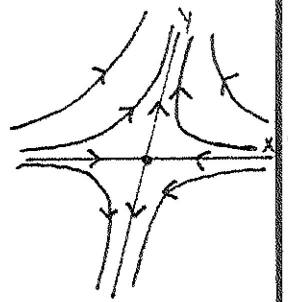
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

noeud impropre instable



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

noeud impropre stable



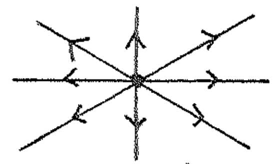
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

col

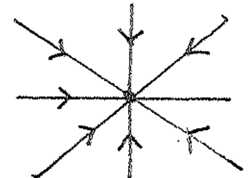
b) les vp sont confondues : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1er cas : A est diagonalisable.

$\lambda > 0$



noeud propre instable

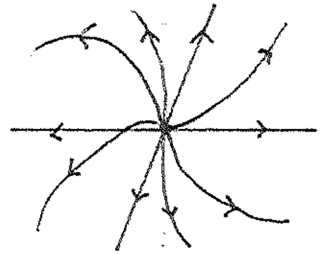


$\lambda < 0$

noeud propre stable.

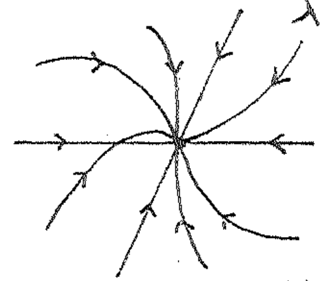
2ème cas : A n'est pas diagonalisable.

$\lambda > 0$



noeud exceptionnel instable

$\lambda < 0$

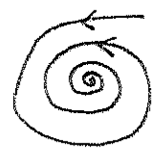


noeud exceptionnel stable

c) les vp de A sont non réelles

$\alpha > 0$

Foyer instable



$\alpha < 0$

Foyer stable

$\alpha = 0$

Centre