220

Équations différentielles $X' = f(t,X)$.
Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue où U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$.

I/ Théorie des équations différentielles

1) Existence et unicité des solutions

Déf 1 (Problème de Cauchy) : Soit $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution à

$$(P) : \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Déf 2 : Le couple (I, y) est solution locale de (P) si $t_0 \in I$ et $y : I \to \mathbb{R}^m$ vérifie (P).

Déf 3 : • Prolongement : Soient (I_1, y_1) et (I_2, y_2) des solutions locales de (P). On dit y_2 est un prolongement de y_1 si $I_2 \supset I_1$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

• Solution maximale : Une solution locale (I, y) est maximale si y n'admet pas de prolongement $(\hat{I}, \hat{y})$ avec $\hat{I} \supsetneq I$.

Thm 4 : Toute solution se prolonge en une solution maximale.

Déf 5 : U est supposé de la forme $J \times \Omega$, J intervalle de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$. Une solution (I, y) est globale si $I = J$.

Ex 6 : • $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t,y) \mapsto ty \end{array}$, $y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y_0 \exp\left(\frac{t^2 - t_0^2}{2}\right) \end{array}$ globale.

• $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ (t,y) \mapsto \frac{1}{y} \end{array}$, $(t_0, y_0) = (2,2)$, $y : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{2t} \end{array}$ maximale mais non globale.

Thm 7 (Cauchy-Lipschitz global) : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tel que $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists k > 0, \forall (t, y, z) \in K \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$.
Alors (P) admet une unique solution globale. (DEV1)

Contre-ex 8 : $y' = 3|y|^{2/3}$.

2) Étude des solutions

Lemme 9 (Gronwall) : Soient $v, \alpha, \beta \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ et $\beta \geq 0$ sur $[a,b]$.
Si $\forall t \in [a,b]$, $v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) v(s)\,ds$,
Alors $\forall t \in [a,b]$, $v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(u)\,du\right) ds$.

App 10 : Si f est k-lipschitzienne par rapport à y, et si y_1 et y_2 sont solutions de $y' = f(t,y)$ sur un intervalle I ouvert contenant t_0 avec $y_1(t_0) = x_1$ et $y_2(t_0) = x_2$ alors

$$\forall t \in I, \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t - t_0|}$$

Thm 11 : Soit $y : [t_0, b[\to \mathbb{R}^m$ solution de $y' = f(t,y)$. Alors f est prolongeable au-delà de b ssi $\exists K$ compact $\subset U$, la courbe $t \mapsto (t, y(t))$, $t \in [t_0, b[$, reste contenue dans K.

Prop 12 (Critère de maximalité) : Si $y :]a, b[\to \mathbb{R}^m$ solution de $y' = f(t,y)$, alors y est maximale ssi $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de U lorsque $t \to a_+$ ou lorsque $t \to b_-$.

Déf 13 : Une application $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est dite propre si $\forall K$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

(DEV2)

Thm 14 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, il y a équivalence entre (i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
et (ii) f est propre et le déterminant du jacobien est partout non nul.

Rem : Ce résultat reste vrai si f est supposée $\mathcal{C}^1$.

II / Étude de stabilité

1) Points d'équilibre

Soit y solution maximale au problème de Cauchy pour $y(t_0) = z_0$.
On suppose que y existe sur $[t_0, +\infty[$.

Déf 15 : Soit $y(t, z)$ la solution maximale à (P) pour $y(t_0, z) = z$.
On dit que la solution $y(t, z_0)$ est <u>stable</u> si
$\exists r > 0, \exists C \geq 0$, (i) $\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$, $t \mapsto y(t, z)$ définie sur $[t_0, +\infty[$
(ii) $\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$, $\forall t \geq t_0$,
$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C \|z - z_0\|.$$
On dit que la solution $y(t, z_0)$ est asymptotiquement stable si on a de plus (ii') $\exists \gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ et $\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$, $\forall t \geq t_0$
$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t) \|z - z_0\|.$$

(Voir figure 1)

2) Cas des équations linéaires à coefficients constants

Thm 16 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propre de la matrice A.
Alors les solutions de $Y' = AY$ sont :
- asymptotiquement stables <u>ssi</u> $\forall j$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$.
- stables <u>ssi</u> $\forall j$, $\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_j) < 0 \\ \text{ou} \\ \mathrm{Re}(\lambda_j) = 0 \text{ et le bloc associé à } \lambda_j \text{ est diagonalisable} \end{cases}$

(Voir figure 2)

3) Cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. On note $A = Df(0)$

Déf 17 : Pour le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = x \end{cases}$, on appelle système linéarisé $\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$.

Thm 18 (Liapunov) : Si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point attractif du système $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = x \end{cases}$: pour tout x assez petit, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Rem : Le système différentiel et le système linéarisé ont alors le même comportement en $t \to +\infty$.

III / Exemples d'études qualitatives

1) Équations particulières

a) Équations de Bernoulli : $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$
où $a, b : J \to \mathbb{R}$ continues et J intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$

Pour une solution y qui ne s'annule pas, on se ramène à une équation linéaire d'ordre 1 : $\frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z + b(t)$
via le changement de variables : $z = y^{1-\alpha}$.

b) Équations de Ricatti : $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$
Si l'on connaît une solution particulière Y_0, on se ramène à l'équation de Bernoulli : $z' = (2a(t)Y_0(t) + b(t))z + a(t)z^2$
avec $y = Y_0 + z$.

2) Équations à variables séparées

(E) : $y' = f(t)g(y)$ avec f et g continues

Prop 19 : • Pour z tel que $g(z) = 0$, on a $y(t) = z$ solution

• Sur l'ouvert $U = \{(x,y) : g(y) \neq 0\}$,

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$

On a alors $y = G^{-1}(F(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, F primitive de f, G primitive de $\frac{1}{g}$, G^{-1} application réciproque bien définie.

Ex 20 : $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ sur l'ouvert $\{|x|>1$ et $|y|>1\} \cup \{|x|<1$ et $|y|<1\}$

3) Étude du pendule simple

$$\theta'' = -\sin\theta, \quad \theta(0) = a, \quad \theta'(0) = 0$$

$Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix} \theta' \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = f(Y)$ et $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

Linéarisation : $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ et $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

$Sp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \{i, -i\}$, et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

Donc les solutions sont stables.

Rappel des développements :

1) Cauchy-Lipschitz global
2) Théorème d'Hadamard-Lévy

Bibliographie :

Demailly
Rouvière
Gourdon
Zuily-Queffélec (pour Hadamard-Lévy)

ANNEXE :

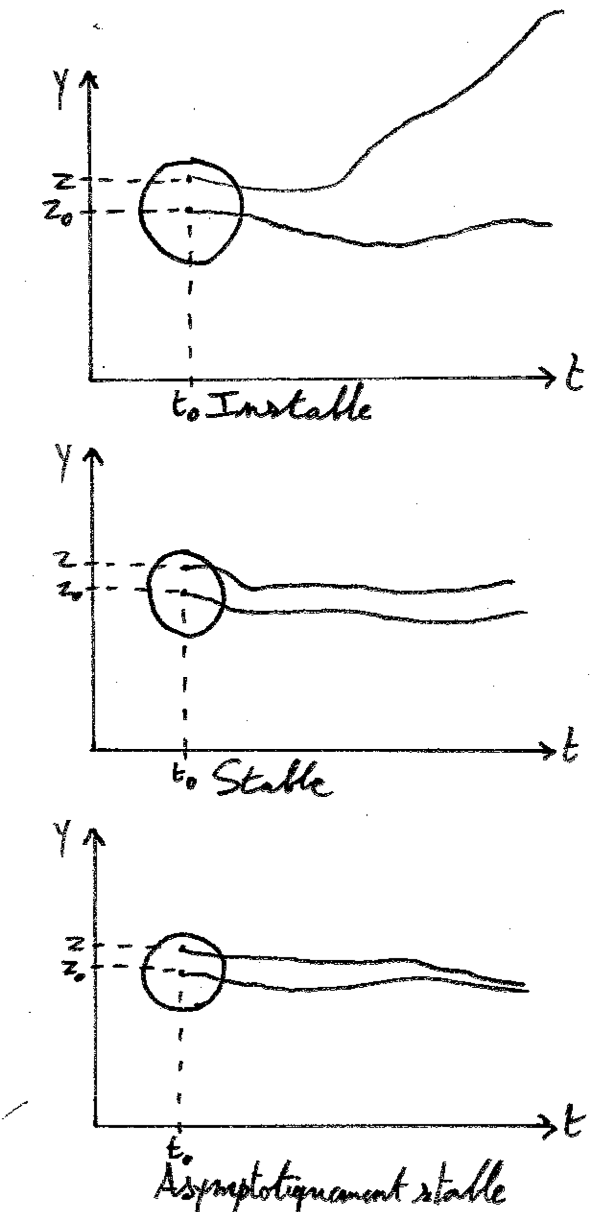
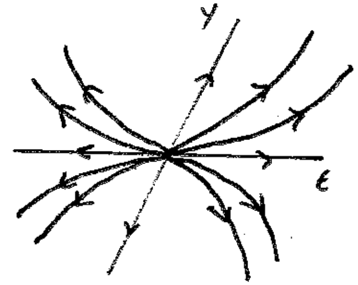


Figure 1

$M' = AM$ avec $\det A \neq 0$ $\quad Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

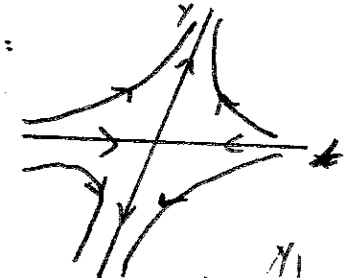
a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad$ • $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Pour $\lambda_1 < \lambda_2$:



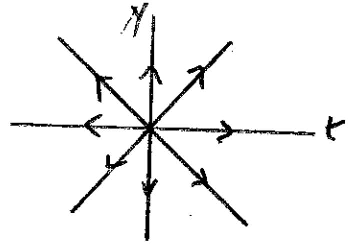
noeud propre instable

• $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: noeud propre stable

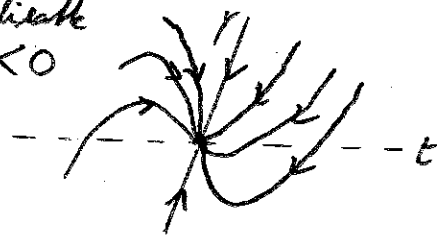
• $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:



• $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$



• A non diagonalisable
$\lambda < 0$



noeud exceptionnel stable

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha = Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2)$

$\alpha > 0$ foyer instable

$\alpha < 0$ foyer stable

$\alpha = 0$ centre

Figure 2