

Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dim 1 et 2.

220

I. Étude des solutions:

② Généralités: $(E): X' = f(t, X)$, f définie de $I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

def ① Une solution est un couple (X, \tilde{I}) où $\tilde{I} \subset I$ et X solution de (E)

def ② Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Un pb. de Cauchy est la recherche d'une solution X de (E) telle que $X(t_0) = x_0$. On note $(E)(t_0, x_0)$ ce pb.

prop ③ (formulation intégrale): Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

X solution de $(E)(t_0, x_0)$ si: $X: \tilde{I} \subset I \rightarrow \Omega$ est continue

$$\bullet \forall t \in \tilde{I}, X(t) \in \Omega$$

$$\bullet \forall t \in \tilde{I}, X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, X(u)) du$$

def ③ Une solution de (E) est dite maximale si il n'existe aucune sol. qui la prolonge strictement.

Thm ④ Toute solution de (E) se prolonge en une sol. maximale.

rem: il n'y a pas unicité

Thm ⑤ si $f \in C^k(I \times \Omega)$ où $k \in \mathbb{N}$, alors toute solution est de classe $C^k(I, \mathbb{R}^n)$.

③ - Étude Locale: soient $t_0, x_0 \in I \times \Omega$

pour $T \geq 0$, on note $C_T := [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r_0)$

def ⑥ On dit que C_T est un cylindre de sécurité de $(E)(t_0, x_0)$ si toute solution $X: \tilde{I} \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que:

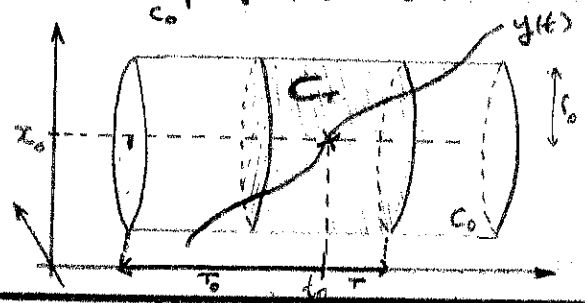
$$\bullet \tilde{I} \subset [t_0 - T, t_0 + T]$$

$$\bullet \forall t \in \tilde{I}, X(t) \in \bar{B}(x_0, r_0)$$

prop ⑦ C_T cylindre de sécurité dès que $T \leq \min(t_0, \frac{x_0}{M})$

pour t_0, x_0 tq $C_{t_0} \subset \Omega$

$$\bullet M = \sup_{C_0} \|f(t, x)\| < \infty$$



def ⑧ Soit $\epsilon > 0$. On suppose f continue. $X: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution ϵ -approchée de (E) si:

$$\bullet \forall t \in \tilde{I}, y(t) \in \Omega$$

$$\bullet \forall t \in \tilde{I}, \exists J \subset \tilde{I} \text{ un intervalle où } X \text{ est } \epsilon', \|y(t) - f(t, y)\| \leq \epsilon$$

Lemme de Gronwall ⑨ supposons que; pour $\epsilon > 0$:

• $\exists C_0$ cylindre tq f soit lipschitzien en sa 2nd variable.

• X_1 (resp. X_2) une sol. ϵ_1 -app. (resp. ϵ_2 -app.) avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$ de $(E)(t_0, x_0)$. ($\epsilon_2 \in \mathbb{R}$)

Alors: $\bullet \forall T \leq \min(t_0, \frac{r_0}{M + \epsilon})$, X_1, X_2 sont dans $C_T \subset C_0$

$$\bullet \|X_1(t) - X_2(t)\| \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

Thm ⑩ (Cauchy-Lipschitz): si f est localement lips. en sa 2nd variable, pour tout cylindre de sécurité C_T , le problème $(E)(t_0, x_0)$

admet une unique solution $X: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \Omega$.

De plus, toute suite $(X_p)_p$ de sol. ϵ_p -approchées, $\epsilon_p \rightarrow 0$, converge uniformément vers X sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Exemple:

Thm (Cauchy-Peano-Arzela) ⑪ pour $T \leq \min(t_0, \frac{r_0}{M})$ et C_T cylindre de sécurité pour $(E)(t_0, x_0)$. Le pb admet une solution $X: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(x_0, r_0)$.

Corollaire ⑫ Il existe au moins une solution maximale à $(E)(t_0, x_0)$. De plus, l'intervalle de définition \tilde{I} de toute solution max. est ouvert.

Exemple de non-unicité: $y'(t) = 3 \cdot y(t)^{2/3}$ avec $y(0) = 0$ admet deux solutions distinctes sur \mathbb{R} :

• la solution nulle $y_1 \equiv 0$ sur \mathbb{R}

• la solution $y_2(t) = t^3$ sur \mathbb{R}

DEV

C - Théorie Globale:

Thm (1) Soient $X_1, X_2: \tilde{I} \subset \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzien en sa seconde variable. Si Y_1 et Y_2 coïncident en un point de \tilde{I} , alors $Y_1 \equiv Y_2$ sur \tilde{I} .

Corollaire (1): si f loc. lip. en sa seconde var. sur $\mathbb{I} \times \Omega$ il existe une unique solution maximale $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Thm: soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur un ouvert $J \times \mathbb{R}^m = U$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Si il existe une fonction continue $k: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lip. de rapport $k(t)$ sur \mathbb{R}^m .

Alors toute solution maximale de l'ED $y' = f(t, y)$ est globale.

Thm (Sortie de Tout compact): soit $]a, b[$ un intervalle de \mathbb{I} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , f localement lip. en sa 2nd variable. Soit X une solution maximale définie sur $]a, \beta[$ ou $]a, b[$ de (E).

Alors il existe, pour tout compact $K \subset \Omega$, un voisinage V de β (resp. a) dans $]a, \beta[$ tel que $\forall t \in V, X(t) \notin K$.

Exemple:

II - Résolution en dimension 1

(a) Équations homogènes: $y' = f(y/x)$

(b) Équations de Bernoulli: $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1$ où a, b continues sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

(c) Équation de Riccati: $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$

on se ramène au cas précédent en posant $y = Y_0 + z$ où Y_0 est une solution particulière.

rem: il existe d'autres exemples: Lagrange, Clairaut...

III - Résolution en dimension 2: Systèmes autonomes

$$(E'): X' = f(X)$$

def (16): un point d'équilibre est stable si $f(x_0) = 0$

• x_0 est un point d'équilibre stable si:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si X solution de (E') vérifiant $|X(t_0) - x_0| < \delta$, on a:

(i) X définie pour tout $t \geq t_0$

(ii) $|X(t) - x_0| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$

• si un pt d'équilibre n'est pas stable, il est dit instable.
• x_0 est dit asymptotiquement stable si:

$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si X est sol. de (E') tel que pour un instant t_0 tq $|X(t_0) - x_0| < \delta$, on a:

(i) X définie pour tout $t \geq t_0$

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = x_0$

(a) - Étude des systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

$$(EL): X' = AX, \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Il y a un unique point d'équilibre, $(0, 0)$, lorsque A est supposée inversible, et les trajectoires dépendent des valeurs propres de A . (cf annexes)

⑥. Étude des systèmes non-linéaires au voisinage d'un point d'équilibre:

on suppose que $f(0) = 0$, 0 est un pt d'équilibre.

Dans un voisinage de 0 , on peut écrire

$$f(x) = f'(0) \cdot x + g(x), \quad g \in \mathcal{O}^1$$

avec $g(x) = o(|x|)$, $|x| \rightarrow 0$

$$(E''): X'(t) = f'(0)X(t) + g(X(t))$$

b1: Stabilité:

Thm ① Soient λ, μ les vp de $f'(0)$, $\text{Re}(\lambda), \text{Re}(\mu) < 0$.

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si X est solution

de (E'') qui à un instant t_0 vérifie $|x(t_0)| \leq \delta$;

(i) X existe $\forall t \geq t_0$

(ii) $|X(t)| \leq \epsilon \cdot e^{-\alpha t}$, $\forall t \geq t_0$

En particulier, l'origine est asymptotiquement stable.

b2: Théorème de Linéarisation:

Thm ② Soient λ, μ les vp de $f'(0)$. Supposons que $\text{Re} \lambda, \text{Re} \mu \neq 0$

Il existe alors un voisinage U de 0 et un homéo de U sur V qui envoie une trajectoire de (E'') sur une trajectoire de (E'') : $X'(t) = f'(0)X(t)$

⑦. Système proie-prédateurs (Lotka-Volterra)

de \mathbb{R}^2 pour le système autonome $(E) X' = f(X)$ avec $X(0) = 0$, soit X_0 un pt d'équilibre. Prenons $U \in \mathcal{V}(X_0)$ et $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U , $\nabla V(X_0) = 0$ telle que:

• $V(x) = 0$ et $\forall X \neq X_0, V(X) > 0$

• $V'(X) = (f(X), \nabla f(X)) < 0 \quad \forall X \in U \setminus \{X_0\}$

Une telle fonction V est appelée fonction de Liapounov.

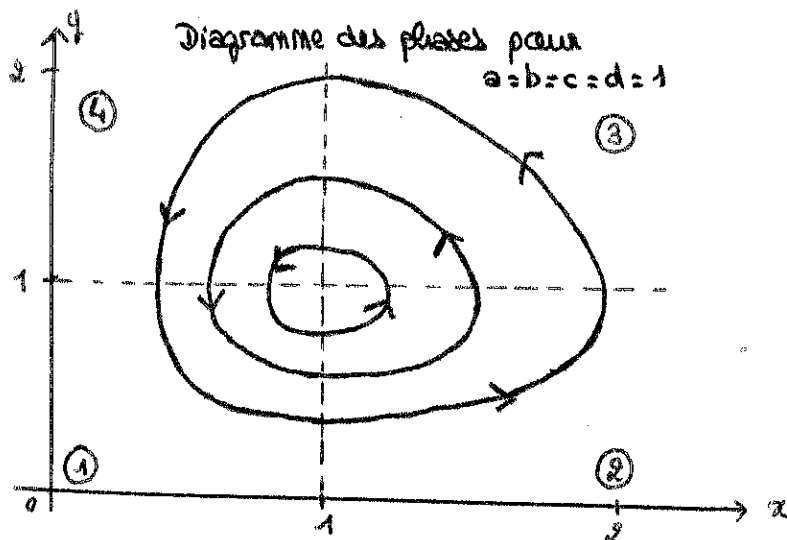
Thm ②: S'il existe une fonction de Liapounov pour le système (E) : $X' = f(X)$ avec $X(0) = 0$ alors le pt d'équilibre X est stable.

Application: système de Lotka-Volterra:

$$(E) \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad \text{avec } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \\ a, b, c, d > 0$$

def: On dit que $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 est une intégrale première si (E) entraîne:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}(x, y) \cdot dx + \frac{d\varphi}{dy}(x, y) \cdot dy = 0$$



Ref: partie I: J.P. Demailly "analyse numérique et ED"

partie II: X. Gourdon (Analyse) [Gou]

partie III: Queltelec, Zully "Analyse pour l'agrégation"

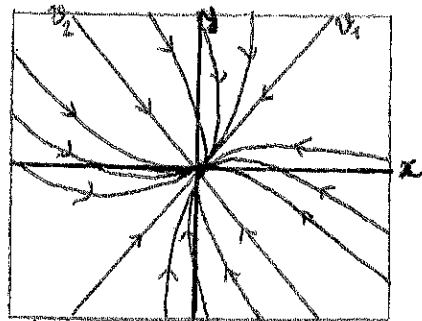
Système Lotka-Volterra: A. Chambert-Loir "Exercices de math pour l'agrég"

DEV 2

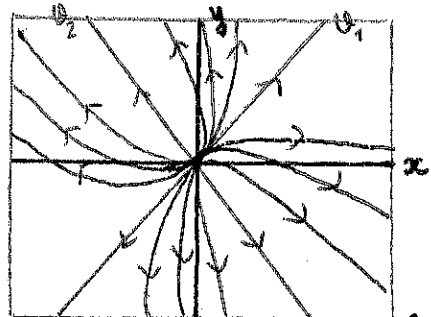
ANNEXE

(EL): $X' = AX, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

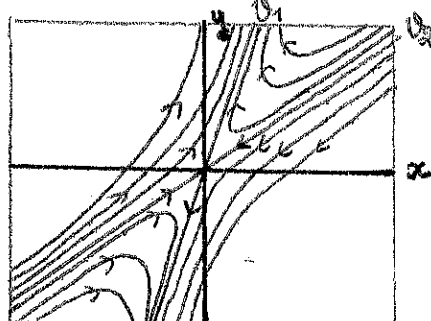
A a deux v.p. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ noeud stable

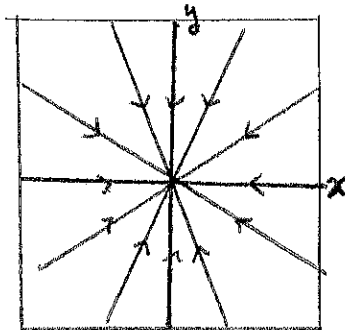


$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ noeud instable

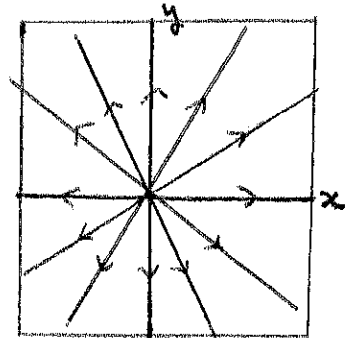


$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ selle ou col

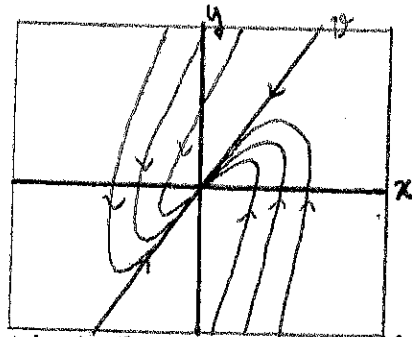
v.p. double $\lambda \in \mathbb{R}$



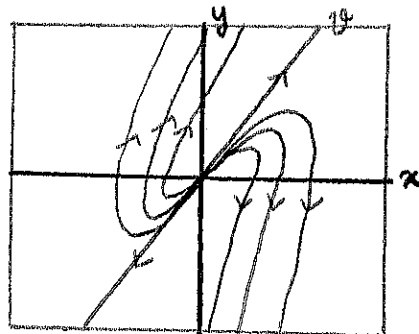
$\lambda < 0, \dim E_\lambda = 2$ puits



$\lambda > 0, \dim E_\lambda = 2$ source

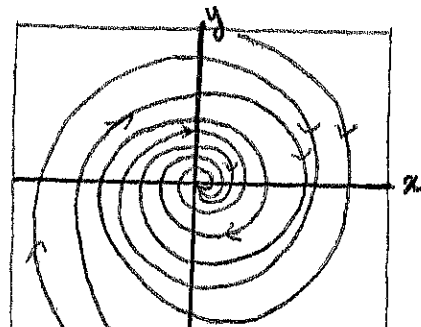


$\lambda < 0, \dim E_\lambda = 1$ noeud dégenéré stable

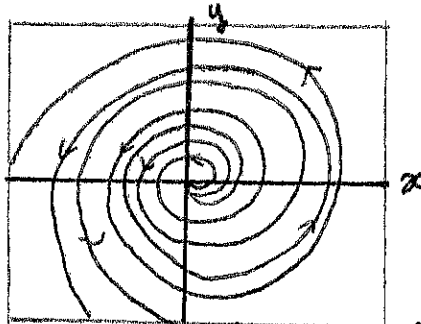


$\lambda > 0, \dim E_\lambda = 1$ noeud dégenéré instable

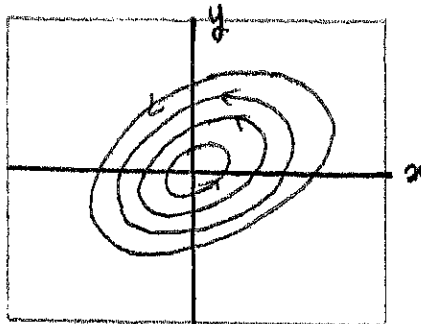
v.p. conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$



$\text{Re } \lambda < 0$ foyer stable



$\text{Re } \lambda > 0$ foyer instable



$\text{Re } \lambda = 0$ centre

Développement - Théorème de Cauchy-Lipschitz

22 janvier 2017

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue. On considère l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$, et le problème de Cauchy associé avec condition initiale $(t_0, y_0) \in U$. On note $M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\|$.

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre contenu dans U . On considérera dans la suite un réel $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, et on se placera dans le cylindre de sécurité

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0.$$

1 Préambule

1.1 Rappels

— On définit le *module de continuité* de f sur C par :

$$\omega_f(\delta) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\|; |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq \delta\}$$

avec $\delta \geq 0$ et $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in C$.

— Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si :

1. y est continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$;
2. $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

1.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) consiste à construire une solution approchée affine par morceaux de l'équation différentielle sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$. Pour cela, on se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T$ et on note les pas successifs : $h_k = t_{k+1} - t_k, k \in \{0, \dots, N-1\}$. On pose $h_{\max} = \max(h_0, \dots, h_{N-1})$.

Soit $y_k = f(t_k)$; on confond la courbe intégrale sur $[t_k, t_{k+1}]$ avec sa tangente au point (t_k, y_k) :

$$y(t) = y_k + (t - t_k)f(t_k, y_k).$$

En partant de la donnée initiale y_0 , on peut donc calculer y_k par récurrence en posant :

$$\begin{cases} y_{k+1} &= y_k + h_k f(t_k, y_k) \\ t_{k+1} &= t_k + h_k \end{cases}$$

On construit de même une solution approchée sur $[t_0 - T, t_0]$ en prenant des pas $h_k < 0$.

2 Preuve du théorème

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est localement lipschitzienne en y , alors pour tout cylindre de sécurité C , le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. De plus, toute suite $(y_p)_p$ de solutions ϵ_p -approchées avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} \epsilon_p = 0$ converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

2.1 Lemme de Gronwall

Lemme 1 (Lemme de Gronwall). Soient y_1, y_2 deux solutions (respectivement ϵ_1 et ϵ_2 -) approchées du problème de Cauchy considéré. Alors $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Démonstration : On peut supposer que $t_0 = 0$ (sans perte de généralité, la démarche reste la même avec $t_0 \neq 0$). Soit $t \in [0, T]$, on pose : $v(t) = \int_0^t \|y_2(s) - y_1(s)\| ds$. Comme y_1 (resp. y_2) satisfait l'équation à ϵ_1 (resp. ϵ_2) près, on obtient par soustraction puis en utilisant le caractère lipschitzien de f :

$$\begin{aligned} \|y_2'(t) - y_1'(t)\| &\leq \|f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\| + \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ &\leq k\|y_2(t) - y_1(t)\| + \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

De plus, comme $y_2(0) = y_1(0) = y_0$:

$$y_2(t) - y_1(t) = \int_0^t (y_2'(s) - y_1'(s)) ds.$$

On en déduit que

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \leq k \int_0^t \|y_2(s) - y_1(s)\| ds + (\epsilon_1 + \epsilon_2)t \quad (1)$$

i.e.

$$v'(t) \leq kv(t) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)t.$$

Après soustraction de $kv(t)$ et multiplication par e^{-kt} , on trouve :

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} = \frac{d}{dt}(v(t)e^{-kt}) \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2)te^{-kt}.$$

On intègre une nouvelle fois ($v(0) = 0$), et il vient :

$$v(t)e^{-kt} \leq \int_0^t (\epsilon_1 + \epsilon_2)se^{-ks} ds = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{1 - (1+kt)e^{-kt}}{k^2},$$

$$v(t) \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{e^{kt} - (1+kt)}{k^2},$$

et l'inégalité (1) donne :

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \leq kv(t) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)t \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{e^{kt} - 1}{k}.$$

On obtient le cas où $t \in [-T, 0]$ en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$. ■

2.2 Propriétés des solutions approchées

Proposition 1. Si $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler est contenue dans la boule $\bar{B}(y_0, r_0)$.

Démonstration : On veut prouver par récurrence que pour tout $t \in [t_0, t_n]$, $\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)$, ce qui nous donnera que pour tout $0 \leq n \leq N$, $y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0)$.

Pour $n = 0$ c'est évident. Supposons que c'est vrai pour un certain $n \leq N - 1$. Alors $(t_n, y_n) \in C$ et $\|f(t_n, y_n)\| \leq M$. On en déduit que, pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \leq M(t - t_n).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\|y_n - y_0\| = \|y(t_n) - y_0\| \leq M(t_n - t_0)$. Pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$, l'inégalité triangulaire donne alors :

$$\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0).$$

En particulier $\|y(t) - y_0\| \leq MT \leq r_0$, d'où $y([t_0, t_{n+1}]) \subset \overline{B}(y_0, r_0)$. ■

Proposition 2 (Convergence des solutions approchées). *Soit $y_p : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une suite de solutions ϵ_p -approchées contenues dans C , telles que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \epsilon_p = 0$. On suppose que $(y_p)_p$ converge uniformément vers une fonction y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Alors y est une solution exacte du problème de Cauchy.*

Démonstration : Comme $\|y_p'(t) - f(t, y_p(t))\| \leq \epsilon_p$, il vient après intégration :

$$\|y_p(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_p(s)) ds\| \leq \epsilon_p |t - t_0|.$$

Si $\delta_p = \max_{[t_0 - T, t_0 + T]} \|y - y_p\|$, on voit que :

$$\|f(s, y_p(s)) - f(s, y(s))\| \leq \omega_f(\delta_p)$$

tend vers 0, d'où grâce à la convergence uniforme :

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = 0, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Comme la limite uniforme y est continue, les rappels du début entraînent que y est une solution exacte du problème de Cauchy. ■

2.3 Démonstration du théorème

2.3.1 Existence

Soit $(y_p)_p$ une suite de solutions ϵ_p -approchées fournies par la méthode d'Euler, avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} \epsilon_p = 0$.

Le lemme de Gronwall montre que sur $[t_0 - T, t_0 + T]$:

$$\|y_p(t) - y_q(t)\| \leq (\epsilon_p + \epsilon_q) \frac{e^{kT} - 1}{k}.$$

Ainsi $(y_p)_p$ est une suite de Cauchy uniforme dans l'espace complet $\overline{B}(y_0, r_0)$, et converge donc uniformément vers une limite y . D'après la proposition 2, y est une solution exacte de l'équation différentielle.

2.3.2 Unicité

Si y_1, y_2 son deux solutions exactes, on montre que $y_1 = y_2$ en appliquant le théorème de Gronwall avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

Développement - Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

22 janvier 2017

Objectif : étudier l'évolution du nombre de proies et de prédateurs en fonction du temps.

On note $X(t)$ (resp. $Y(t)$) le nombre de proies (resp. de prédateurs) au temps t . X et Y sont deux applications $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$.

On considère les proportions de proies/prédateurs :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}.$$

X_0 et Y_0 sont supposés grands, assez pour que les variations de $X(t)$ et $Y(t)$ soient petites en comparaison; cela permet de supposer $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ continues.

On regarde également les taux de variations sur un intervalle Δt : $\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$. Si on suppose les variations $\Delta X(t)$ petites par rapport à $X(t)$ (c'est envisageable pour des populations nombreuses), on peut écrire :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}.$$

- En l'absence de prédateurs, le taux de croissance des proies est constants : $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$.
- En l'absence de proies, les prédateurs ont tendance à disparaître : $\frac{y'(t)}{y(t)} = -c$.
- Quand les deux interagissent, on suppose le taux de prédation (*i.e.* la diminution du nombre de proies due aux prédateurs) proportionnel au nombre de prédateurs. De même, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel au nombre de proies à leur disposition.

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by \quad \text{et} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx; \quad a, b, c, d > 0.$$

On obtient ainsi le *système de Lotka-Volterra* :

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

1 Intégrale première du système

On considère la fonction :

$$H(x, y) = by + dx - a \ln y - c \ln x.$$

Pour $(x(t), y(t))$ une solution du système, posons $H(t) = H(x(t), y(t))$. Comme $x_0, y_0 > 0$, H est bien défini, pour tout t de l'intervalle I de la solution. On dérive :

$$H'(t) = by' + dx' - a \frac{y'}{y} - c \frac{x'}{x} = by(-c + dx) + dx(a - by) - a(-c + dx) - c(a - by) = 0.$$

Donc H est constante. C'est une intégrale première du système.

2 Propriétés des solutions

On considère une solution $(x(t), y(t))$ du problème de Cauchy, de conditions initiales (x_0, y_0) .

Positivité : Soient $x_0, y_0 > 0$. Supposons qu'il existe s tel que $x(s) = 0$. Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que $\forall t, x(t) = 0$ et $y(t) = y(s)e^{-c(t-s)}$, alors que $x(0) > 0$. De même si $y(s) = 0$, on aurait $\forall t, y(t) = 0$ et $x(t) = x(s)e^{a(t-s)}$, alors que $y(0) > 0$. On a donc forcément $x, y > 0$.

Les solutions sont bornées : Il existe $A, B > 0$ tels que (croissance comparée) pour tout $x > A, c \log(x) < \frac{dx}{2}$ et pour tout $y > B, a \log(y) < \frac{dy}{2}$. Donc si (x, y) est en-dehors du compact $[-A, A] \times [-B, B]$, on a $H(x, y) > \frac{dx+dy}{2}$. D'où (on rappelle que H est une intégrale première, i.e. si (x, y) est solution, alors $H(x, y)$ est constante) :

$$0 < x(t) < \max\{A, \frac{2}{d}H(x_0, y_0)\} \text{ et } 0 < y(t) < \max\{B, \frac{2}{b}H(x_0, y_0)\}.$$

3 Points d'équilibre du système

Définition 1. Soit x un point d'équilibre d'un système autonome $u' = f(u), u(0) = 0$, avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soient $U \subset \Omega$ un voisinage de x et $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U \setminus \{x\}$ telle que :

- $V(x) = 0$ et $\forall u \neq x, V(u) > 0$.
- $\dot{V}(u) = \langle f(u), \nabla V(u) \rangle \leq 0, \forall u \in U \setminus \{x\}$.

Une telle fonction V est appelée *fonction de Lyapunov*.

Théorème 1 (Admis). *S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système autonome, alors le point d'équilibre x est stable.*

Le système admet deux points d'équilibre : $(0, 0)$ et $(\frac{a}{d}, \frac{a}{b})$.

- L'application

$$f : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} \text{ est dérivable en } (0, 0) \text{ et}$$

$$D_f(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Ainsi $a > 0$ est une valeur propre de $D_f(0, 0)$, on en déduit que $(0, 0)$ est un point d'équilibre instable.

- Les valeurs propres de $D_f(\frac{a}{d}, \frac{a}{b})$ sont les complexes $\pm i\sqrt{ac}$, on ne peut donc pas appliquer le principe de linéarisation.

Posons $V : (x, y) \mapsto H(x, y) - H(\frac{a}{d}, \frac{a}{b})$; c'est une fonction de Lyapunov.

En effet, $\langle f(x, y), \nabla V(x, y) \rangle = 0$, et $V(x, y) \geq 0$, nul seulement pour $(x, y) = (\frac{a}{d}, \frac{a}{b})$.

En appliquant le théorème, on en conclut que $(\frac{a}{d}, \frac{a}{b})$ est stable.

4 Périodicité des solutions

Tout d'abord, la solution maximale est définie sur \mathbb{R} . En effet :

- $x' \leq ax$ donc $x \leq x_0 e^{at}$ et x ne peut pas exploser en temps fini.
- $y' \leq dxy$ donc $y \leq y_0 \exp(d \int_{t_0}^t x)$ et y n'explose pas en temps fini.

On divise $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en quatre zones dans lesquelles x et y sont monotones. On va suivre une trajectoire à travers ces zones, pour montrer qu'elle est périodique.

Soit (x_0, y_0) le point initial, qu'on suppose dans la zone 1. On note $(x(t), y(t))$ la solution du système qui part de (x_0, y_0) .

4.1 $a - by > 0$ et $c - dx > 0$

Ici x croît et y décroît (strictement). Supposons que $(x(t), y(t))$ ne sorte pas de cette zone. Alors x et y ont des limites quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty \in \left[x_0, \frac{c}{d} \right] \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_\infty \in [0, y_0].$$

On en déduit (d'après le système) que x' et y' convergent aussi. Leur limite ne peut qu'être nulle ; en effet, si x' tend vers $l \neq 0$, alors $x \sim lt$ donc ne peut pas converger.

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$, d'où $(x_\infty, y_\infty) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$. C'est impossible puisque par hypothèse on a $y_0 < \frac{a}{b}$ et y est décroissante.

Il existe donc un réel t_1 maximal tel pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $(x(t), y(t))$ est dans la première zone. De plus $x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $y(t_1) < \frac{a}{b}$. On en déduit également que $x'(t_1) > 0$ et $y'(t_1) = 0$.

À partir de t_1 , $(x(t), y(t))$ passe dans la zone 2.

4.2 $a - by > 0$ et $c - dx < 0$

Alors x et y sont croissantes. Supposons encore que l'on reste dans cette zone. Alors x et y ont des limites quand $t \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty \in [x_1, +\infty[\text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_\infty \in \left[y_1, \frac{a}{b} \right].$$

Par composition de fonctions continues, on sait que $\log(y(t))$ tend vers $\log(y_\infty)$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{y'}{y} \right) = 0$, donc $x_\infty = \frac{c}{d} = x_1$. Cela contredit la stricte monotonie de x .

Il existe donc un réel t_2 maximal tel que pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $(x(t), y(t))$ est dans la deuxième zone. Pour $t = t_2$: $x(t_2) > \frac{c}{d}$ et $y(t_2) = \frac{a}{b}$. On en déduit que $x'(t_2) > 0$ et $y'(t_2) = 0$.

À partir de t_2 , $(x(t), y(t))$ entre donc dans la zone 3.

4.3 $a - by < 0$ et $c - dx < 0$

Ici x croît et y décroît. On raisonne comme pour la deuxième zone, et on montre qu'il existe un temps t_3 à partir duquel $(x(t), y(t))$ sort de la zone 3 pour entrer dans la zone 4.

4.4 $a - by < 0$ et $c - dx > 0$

C'est encore le même raisonnement. On montre qu'il existe un temps t_4 à partir duquel la solution sort de la zone 4 et retourne dans la première zone.

4.5 Périodicité

On montre de la même façon qu'il existe un temps maximal t_5 auquel la solution sort de la première zone pour entrer en zone 2, et que $x(t_5) = x(t_1) = \frac{c}{d}$. On a même $(x(t_5), y(t_5)) = (x(t_1), y(t_1))$. En effet, comme H est une intégrale première on a $H(x(t_5), y(t_5)) = (x(t_1), y(t_1))$. Donc si on note

$$h : y \mapsto H\left(\frac{c}{d}, y\right) = by + c - a \ln y - c \ln \frac{c}{d}$$

on a $h(y(t_5)) = h(y(t_1))$.

Or h est injective sur $]0, \frac{a}{b}[$ (on montre qu'elle est strictement monotone sur cet intervalle en calculant sa dérivée). Comme $y(t_5), y(t_1) < \frac{a}{b}$, on en conclut que $y(t_5) = y(t_1)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t_5 + t), y(t_5 + t))$ et $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (x(t_1 + t), y(t_1 + t))$. Ces deux couples vérifient le même problème de Cauchy, où $x(t_1) = \tilde{x}(0) = \bar{x}(0) = x(t_5) = \frac{c}{d}$ et $y(t_1) = \tilde{y}(0) = \bar{y}(0) = y(t_5)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles sont donc égales (par unicité).

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t_5 - t_1 + t), y(t_5 - t_1 + t)) = (x(t), y(t))$, *i.e.* la solution est périodique de période $t_5 - t_1$.

