221

Rouvière, Gourdon (Arnold, Hubbard)

Équation différentielle linéaire, système d'équation différentielle linéaire, exemples et applications.

Introduction au problème :

On souhaite étudier des trajectoires, par exemples on étudie les oscillations d'un ressorts

$$m x'' = -k x \qquad (1)$$

ou encore le mouvement d'un pendule

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

I) généralités $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est la de $a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ on cherche alors les $y \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ solutions de l'équation : $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = b$.

1) simplification du problème (application de l'algèbre linéaire)

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ on se ramène à chercher les Y solutions de $AY + B = Y'$

Ainsi on ne s'intéressera qu'aux problèmes de la forme : $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$

$(E) \quad AY + B = Y'$

$(E_H) \quad AY = Y'$ (equations homogène)

par exemple l'équation (1) devient $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}$.

2) théorème de Cauchy-Lipschitz

Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ il existe une unique solution à E telle que $y(t_0) = y_0$.

application : $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ commutent $\Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

3) structures de l'ensemble des solutions

On appelle S (resp S_H) l'ensemble des solutions de E (resp E_H).

- S_H est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.
- S est un $\mathbb{K}$-espace affine dirigé par S_H.

Si $t_0 \in I$, $\Phi_{t_0} : \begin{array}{l} S_H \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ y \longrightarrow y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme.

corollaire : pour $y_1, \dots y_p \in S_H$ on a l'équivalence

(i) $(y_1, \dots y_p)$ est libre dans S_H.

(ii) $\exists t_0 \in \mathbb{K}$, $(y_1(t_0), \dots y_p(t_0))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

(iii) $\forall t_0 \in \mathbb{K}$, $(y_1(t_0), \dots y_p(t_0))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

4) méthode de variation des constantes

définition : On appelle système fondamental de solutions une base $(y_1, \dots y_n)$ de S_H.

On cherche une solution de (E) sous la forme : $y(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) y_i(t)$. On a : $\Lambda'(t) = (y_1 \dots y_n)^{-1}(t) \cdot B(t)$, $t \in I$

avec $\Lambda(t) = {}^t(\lambda_1, \dots \lambda_n)(t)$.

exemple : résolution de $y' + y = \sin t$, $y : t \to \frac{\sin t - \cos t}{2} + \mu e^{-t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

II) Système à coefficients constants, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) Equation homogène

théorème : $y : t \longrightarrow e^{(t-t_0)A} \cdot y_0$ est l'unique solution de E telle que $y(t_0) = y_0$.

application : $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$ est un morphisme continue, $f(t) = e^{tA}$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

proposition : On écrit χ_A le polynôme caractéristique de A sous la forme : $\chi_A = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$ (sur $\mathbb{C}$)

Pour tout j, il existe m_j solutions indépendantes de la forme : $x_{j,k}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot P_{j,k}(t)$, $k \in [\![1, m_j]\!]$ et $P_{j,k} \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$.

Ceci est une application de la réduction des endomorphismes linéaires.

Corollaire: Si A est réelle, en écrivant $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, en restant dans l'espace des solutions réelles, le système fondamental s'écrit : $t \to t^{l} e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t)\, a$ $a, b \in \mathbb{R}^d$
$t \to t^{l} e^{t\alpha_j} \cos(\beta_j t)\, b$ et $\lambda, l \leq m_j - 1$

ainsi dans le cas de l'équation (1) avec $\chi_A = X^2 + \frac{k}{m}$
$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$ et donc on a $t \to \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$
$t \to \sin(t\sqrt{\frac{k}{m}})$ pour $x(t)$.

On se représente plus facilement ce résultat dans le cas où A est diagonalisable : $A = PDP^{-1}$.
On pose $Y_1 = P^{-1}Y$ on résout $Y_1' = DY_1$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$
on a donc $y_{1,i}'(t) = \lambda_i y_{1,i}(t)$ de solution $e^{\lambda_i t}.a$ et on fait ensuite $Y = PY_1$.

2) Équation complète

En appliquant la méthode de variation des constantes
$y : t \to e^{(t-t_0)A}.y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-z)A}.B(z)\,dz$ est l'unique solution vérifiant $y(t_0) = y_0$.

III) Systèmes linéaires à coefficients variables

1) Résolvante

définition: Si $(t, t_0) \in I^2$, on appelle résolvante de (E_H) l'isomorphisme : $R(t, t_0) = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}$.

propriétés:
- $R(t_0, t_0) = Id$
- $R(t_2, t_1)\, R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
- $R'(\cdot, t_0) = A\, R(\cdot, t_0)$
- Les solutions de E s'écrivent :

$y : t \to R(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, z) B(z)\, dz$
avec $y(t_0) = y_0$.

2) Wronskien

définition: On appelle wronskien W de (E_H) le déterminant d'un système fondamental de solution.

proposition: si $t \in I$,
$W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(z))\,dz}.\det(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$.

3) résolution par développement en série entière

Replaçons nous dans le cas $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = b$

proposition: Si $a_0, \dots a_{n-1}, b$ sont DSE sur $]t_0 - R, t_0 + R[$, alors toute solution de E sur $]t_0 - R, t_0 + R[$ est DSE.

exemple: équation $y'' - xy = 0$.

IV) étude qualitative de solutions

1) Étude de zéros de solutions, exemples.

Considérons : $y'' + ay' + by = 0$

a) Théorème: (d'entrelacement des zéros) : (admis)
Si y_1, y_2 est un système fondamental de solutions, entre deux zéros de y_1 il existe un unique zéro de y_2. Exemple : $y'' + y = 0$.

2) Stabilité des solutions : $I = [t_0 ; +\infty[$

a: "définitions" On définit $y(t, x)$ la solution de E telle que $y(t_0) = x$.

(i) $t \to y(t, x)$ est stable s'il existe une boule $\bar{B}(x_0, r)$ et $C > 0$ vérifiant : $\forall x \in \bar{B}(x_0, r)$, $t \geq t_0$, $\|y(t,x) - y(t, x_0)\| \leq C\|x_0 - x\|$.

(ii) $t \to y(t,x)$ est asymptotiquement stable s'il exist $\bar{B}(x_0, r)$ et $\gamma \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[, \mathbb{R})$, $\gamma(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ telle que $\forall x \in \bar{B}(x_0, r)$, $\forall t \geq t_0$, $\|y(t,x) - y(t, x_0)\| \leq \gamma(t)\|x_0 - x\|$

b: "Cas des systèmes à coefficients constants".

a) Théorème: Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ admet pour valeur propre $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ alors les solutions de (E_H) sont :
- asymptotiquement stables si et seulement si $\forall i \in [1, n]$ $Re(\lambda_i) < 0$.

• stables si $Re(\lambda_i)<0$ ou $Re(\lambda_i)=0$ et A induit un endomorphisme diagonalisable sur le sous espace caractéristique de λ_i, $\forall i \in 1,\dots,n$.

3) aspect géométrique : champ de vecteurs réel en dimension 2, points singuliers.

On étudie les points d'équilibre (points de vitesse nulle) de $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec A à coefficient constant et $\det A \neq 0$.

Un point de vitesse nulle est dit point singulier, ici seul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sera étudié.

Il existe 9 cas dépendant des valeurs propres de A menant à des comportement géométriques différents. On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de A. (Se reporter ensuite aux figures).

V) applications aux cas non linéaires.

1) changement de variable

a : "équations de Bernoulli"

$y' = ay + by^{\alpha}$, $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$z = y^{1-\alpha}$ donne $z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b$

b : "équation de Ricatti"

$y' = ay^2 + by + c$, $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$z = \dfrac{1}{y - y_0}$ où y_0 est une solution supposée connue.

On obtient : $z' + (2ay_0 + b)z + a = 0$

2) linéarisation d'un système autonome.

L'idée de la partie est de montrer qu'une fois les connaissances sur les systèmes linéaires acquises, on peut gérer à peu près tous les systèmes d'équations différentielles.

Précédemment on a vu deux cas particulier où on se ramenait au cas linéaire de manière globale, mais plus généralement on peut s'y ramener de toute manière de façon locale.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert.

On considère $x' = f(x)$.

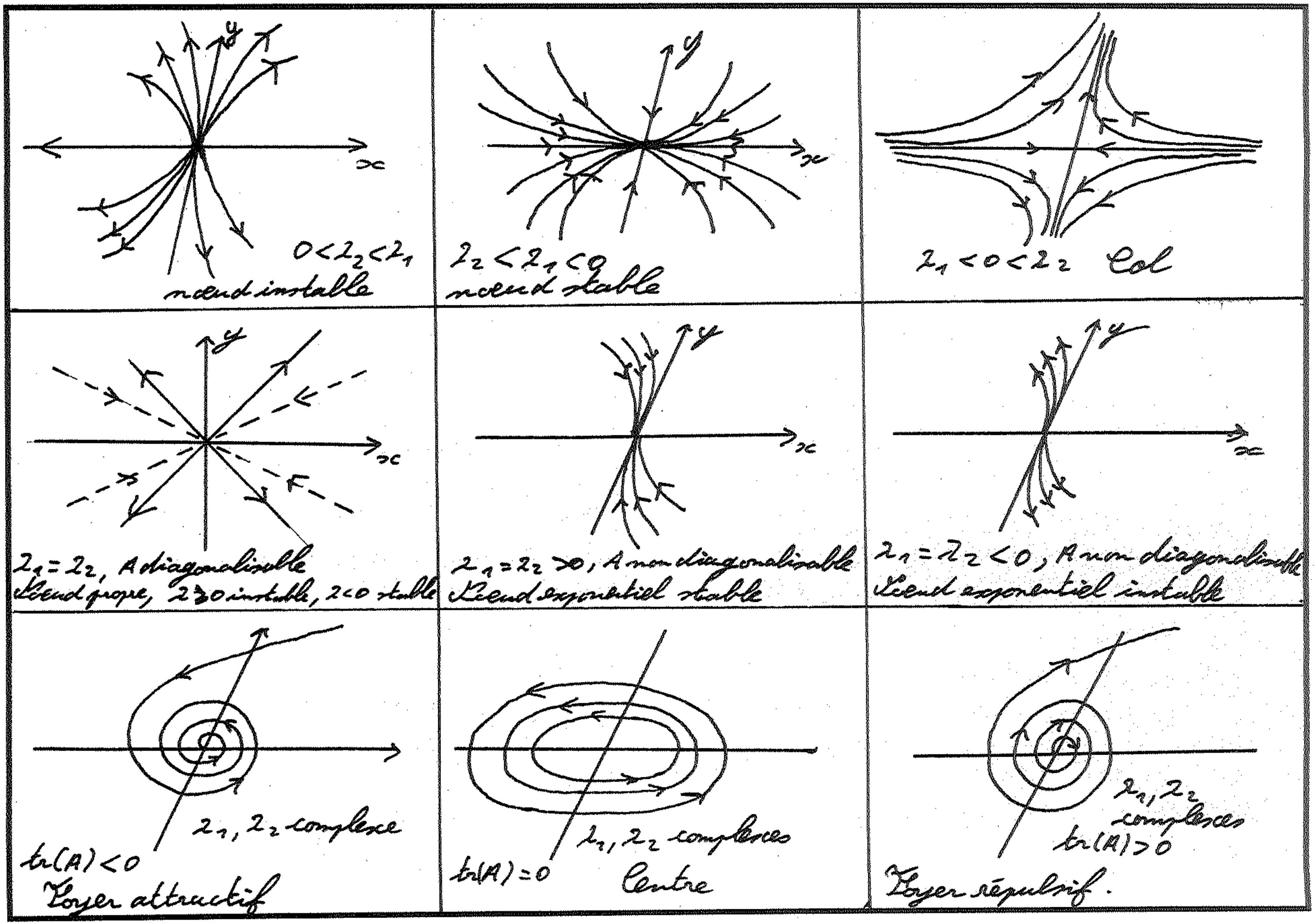
a : "Théorème de stabilité de Lyapunov"

Si $f(0)=0$ et que toutes les valeurs propres de $Df(0)$ sont à partie réelle strictement négative alors les solutions sont asymptotiquement stables pour $x_0=0$.

b : "Théorème d'instabilité de Cetaev"

Si $f(0)=0$ et que l'une des valeurs propres de $Df(0)$ a une partie réelle strictement positive, alors les solutions ne sont pas stables pour $x_0=0$.

application : On reprend notre pendule avec l'équation (2) $\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$ et on conclut que les points d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.



y
x
0 < λ2 < λ1
nœud instable
y
x
λ2 < λ1 < 0
nœud stable
λ1 < 0 < λ2 Col
y
x
λ1 = λ2, A diagonalisable
Nœud propre, λ>0 instable, λ<0 stable
y
x
λ1 = λ2 > 0, A non diagonalisable
Nœud exponentiel stable
y
x
λ1 = λ2 < 0, A non diagonalisable
Nœud exponentiel instable
λ1, λ2 complexe
tr(A) < 0
Foyer attractif
λ1, λ2 complexes
tr(A) = 0
Centre
λ1, λ2
complexes
tr(A) > 0
Foyer répulsif.