221 | Equations différentielles linéaires. Systèmes différentiels linéaires. Exemples et applications.

E Banach de dimension $n \geq 1$, $U \subset E$ ouvert, I intervalle de $\mathbb{R}$

D ouvert connexe de E non vide

I - Définitions et théorèmes généraux

1) Définitions

Déf 1 : Soit $f : I \times U \longrightarrow E$. Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit :
$y'(t) = f(t, y(t))$

Déf 2 : On dit que $\varphi : I \to E$ est solution si φ est de classe C^1 et :
- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I$
- $\varphi(t) \in U \quad \forall t \in I$

Ex 3 : (Loi de Malthus) $N'(t) = r N(t)$, r constante.
N désigne la densité d'individus d'une population.

Déf 4 : On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J$ et $J \subset I$, et d'une solution $y : J \to D$ telle que y soit dérivable sur J et $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in J \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(\mathcal{P})$

Remarque : le problème $(\mathcal{P})$ équivaut à la formulation intégrale :
$\forall t \in J$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$

Déf 5 : Un couple (J, y) est appelé solution locale si $t_0 \in J$, $J \subset I$, $y \in C^1(J)$ et J est un voisinage de t_0 dans I, et si y satisfait $(\mathcal{P})$ sur J.

Déf 6 : Une solution locale (J, y) de $(\mathcal{P})$ est appelée solution maximale si pour tout prolongement $(\tilde{J}, \tilde{y})$ de (J, y), on a $J = \tilde{J}$ (et $y = \tilde{y}$)

Déf 7 : Une solution locale est dite globale si $J = I$

Ex 8 :
- $\begin{cases} y'(t) = -2t\, y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ solution globale
- $\begin{cases} y'(t) = 2t\, y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{1-t^2} \quad \forall t \in]-1, 1[$
unique solution maximale

Déf 9 :
- $f : I \times D \to E$ est dite globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable s'il existe $L \geq 0$ telle que
$\forall t \in I, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$
- f est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et une constante $L(t_0, x_0)$ tels que
$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0) |x_1 - x_2|$

Ex 10 : Si $f(t, y) = a(t) y + b(t)$, où $a : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ alors f est globalement lipschitzienne.

2) Théorème de Cauchy-Lipschitz

Thm 11 : Soit $f \in C^0(I \times E, E)$ globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors pour toute condition initiale y_0, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ possède une unique solution globale sur E.
De plus, toute solution locale est restriction de celle-ci.

Principe de non-intersection des trajectoires :

Cor 12 : Soit (y_1, J_1) et (y_2, J_2) deux solutions locales à l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ avec f localement lipschitzienne.
S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$

Contre-exemple 13 : Fonction continue mais pas localement lipschitzienne : $x \longmapsto \sqrt{x}$. Non u_ ité de la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

II - Systèmes différentiels linéaires

1) Simplification de l'étude d'équations différentielles linéaires

Déf 14 : Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ deux applications continues.
Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit :

$$(L) : \quad y' = a(t)\,y + b(t)$$

Son équation homogène associée est :

$$(H) : \quad y' = a(t)\,y$$

Déf 15 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout $t \in I$, considérons $A(t)$ et $B(t)$ les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle système différentiel l'équation différentielle $Y' = A(t)Y + B(t)$

Remarque : Un système différentiel est l'écriture matricielle de (L).

Déf 16 : Une équation différentielle linéaire d'ordre $p \geqslant 1$ est de la forme

$$y^{(p)} = a_{p-1}(t)\,y^{(p-1)} + \dots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y + b(t)$$

avec pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $a_k : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, et $b : I \to E$ continues

Prop 17 : On peut toujours se ramener à un système différentiel d'ordre 1.
En effet, en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, on a $Y' = A(t)Y + B(t)$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & \cdots & a_{p-1}(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

Remarque : En posant $F(t, Y) = A(t)Y + B(t)$, F est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution à (P) par Cauchy-Lipschitz

2) Cas des coefficients constants

$Y' = AY + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constante, $B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ variable

Déf 18 : On définit l'exponentielle de matrice $e^A := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$

Remarque : Cette définition est licite car la série converge absolument.
En effet, $\left|\!\left|\!\left| \frac{1}{n!} A^n \right|\!\right|\!\right| \leqslant \frac{1}{n!} |||A|||^n$ où $|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
et alors $|||e^A||| \leqslant e^{|||A|||} < +\infty$

Prop 19 : L'application $A \longmapsto e^A$ est continue. (Elle est même C^∞)

Thm 20 : La solution Y de (H) telle que $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A}\,Y_0$

Méthode de résolution de (H) :

- Si A est diagonalisable, on a plus simplement n solutions linéairement indépendantes $y_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t} x_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de A et les x_i forment une base de vecteurs propres de E associés aux λ_i.
- Si A n'est pas diagonalisable, on peut avoir recours à l'exponentielle de matrice (théorème 20), même si la méthode est un peu lourde en pratique.

Résolution avec second membre :

On peut utiliser la méthode de variation de la (des) constante(s) afin de trouver une solution particulière

3) Cas des coefficients variables

$Y' = A(t)Y + B(t)$.

Pas de méthode générale de résolution. Néanmoins, on peut tenter :

- Développements en séries entières.
- Méthode d'abaissement de l'ordre (qui présuppose de connaître des solutions particulières). $\boxed{\text{DEV}}$

III - Comportement qualitatif des solutions

1) Stabilité

Notation : On note $y(\cdot, x)$ la solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y(t)), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$

Déf 21 : Soit x_0 un équilibre du système $y' = f(y(t))$, (i.e $f(x_0) = 0$)

(i) On dit que x_0 est un équilibre stable si pour tout voisinage U de x_0 il existe un voisinage $U' \supset U$ de x_0 tel que pour tout $x \in U'$, $y(\cdot, x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et ne sort pas de U.

(ii) On dit que x_0 est un équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout $x \in W$, $y(\cdot, x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t,x) = x_0$

Ex 22 : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y^2 - 2y \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $(0,0)$ stable, $(2,2)$ instable (cf. 3))

2) Cas linéaire

$Y' = AY$. On étudie la stabilité (asymptotique) de l'origine :

Prop 23 :
- Si A admet une valeur propre de partie réelle >0, alors $\|e^{tA}\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ et 0 est instable.
- Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle <0, alors $\|e^{tA}\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et 0 est asymptotiquement stable
- Si $Sp(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \,/\, \Re(z) \leq 0\}$ et il existe une valeur propre de partie réelle nulle, alors :
  - ↳ Si les blocs de Jordan associés aux valeurs propres de partie réelle nulle sont triviaux, $t \mapsto e^{tA}$ est bornée et 0 est stable
  - ↳ Sinon, 0 est instable

Application 24 : Portraits de phase en dimension 2. $\boxed{\text{DEV}}$ DEMAILLY

3) Cas non linéaire

Déf 25 : On appelle système linéarisé autour de x_0 associé à $y' = f(y(t))$ le système linéaire $y'(t) = \underbrace{Jf(x_0)}_{\text{matrice jacobienne de } f \text{ en } x_0}(y(t) - x_0)$

Thm 26 : "Instabilité en première approximation".
Si $Jf(x_0)$ possède une valeur propre à partie réelle >0, alors x_0 n'est pas un équilibre stable du système $y' = f(y(t))$

Application 27 : Lotka-Volterra (Modèle proies-prédateurs)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a+by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d > 0$$

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} a>0 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$ donc $(0,0)$ instable

$$Jf\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique $X^2 + ac$
2 racines distinctes de partie réelle nulle.
$\Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ stable

Références :

- DEMAILLY, analyse numérique et équations différentielles
- GOURDON, analyse
- GOSTIAUX, tome 3