Leçon 221 : Equations différentielles linéaires, Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

I) Généralités sur les Equations différentielles linéaires

A) Définitions et premières propriétés

Dans toute cette leçon, sauf mention du contraire, E est un espace de Banach de dimension $n \geq 1$, $U \subset E$ est un ouvert, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Def 1 Soit $f : I \times U \to E$. On appelle équation différentielle d'ordre 1 une équation de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$, avec $y \in \mathcal{F}(I, U)$

Ex: $y'(t) = \frac{1}{1+t^2} y(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Def 2: On appelle équation différentielle linéaire homogène une équation différentielle de la forme $\sum_{p=0}^{n} a_p(t) y^{(p)}(t) = 0$

Ex: $(1+t)y'(t) + (1-t)y(t) = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

On peut de plus étendre ces deux définitions aux équations différentielles d'ordre quelconque.

Def 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$. On appelle système d'équations différentielles linéaires l'équation $X'(t) + A X(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

On peut toujours ramener une équation différentielle d'ordre p à un système linéaire d'ordre 1.

Def 4: On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ et d'une condition initiale

exemple : $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{1+t^2} y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\varphi : I \to E$ est solution de ce problème de Cauchy si
1. φ est C^1 et $\varphi(t) \in U$ $\forall t \in I$
2. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ $\forall t \in I$
3. φ respecte la condition initiale

Prop 5: Si φ_1 et φ_2 sont solutions d'une équation différentielle homogène, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ en est aussi une solution

Thm 6: L'ensemble des solutions d'une équation différentielle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^1(I, U)$ si l'équation est homogène, un espace affine si l'équation n'est pas homogène.

B) Théorème de Cauchy-Linéaire [Duipt 1]

Soit B continue de I dans E et $A : I \to \mathcal{L}(E, E)$ continue

Alors pour tout problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = A(t) y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

il existe une unique solution globale sur E : $y : I \to E$

Def 7: On dit que φ est solution locale si φ est solution sur un ouvert $J \subset I$,

$\varphi : J \to E$ est une solution maximale si pour tout prolongement $\tilde{\varphi} : \tilde{J} \to E$, on a $J = \tilde{J}$ et $\varphi = \tilde{\varphi}$.

(II) Résolution et aspects qualitatifs.

(A) Équations et systèmes homogènes

<u>Thm 8</u> :

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'une equation differentiel linéaire homogène.

Alors $\forall t_0 \in I$, $\mathcal{S} \to E$, $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme

<u>Application</u> Determiner la dimension de l'espace des solutions d'une équation differentielle ou d'un système differentiel.

<u>Def 9</u> : Soit (E) : $Y' = A(t)Y$ une équation differentielle linéaire homogène d'ordre 1, avec $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ continue

On definit le Wronskien de $Y_1, \dots, Y_n$, n solutions de (E), par l'application $\omega : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{cases}$

<u>Prop</u> : Avec les notations precedentes,

$$\left(\exists t_0 \in I \,/\, \omega(t_0) \neq 0 \right) \Longleftrightarrow \left(\forall t \in I,\ \omega(t) \neq 0 \right)$$

(B) Methode de variations des constantes.

<u>Thm 10</u> :

Soit (E) une equation differentiel, et (E_h) l'equation homogène associée.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de l'ensemble des solutions de (E_h).

Alors il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t)$ soit solution de (E).

(C) Cas des équations à coefficients constants.

On se place dans le cas où l'equation differentielle est de la forme $Y' = AY$, avec A une matrice a coefficients constants.

<u>Rappel</u> : Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on definit l'exponentielle de la matrice A par $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

<u>Thm 11</u> : La solution du probleme de Cauchy $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ est de la forme $Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot X_0$.

Methodes de resolutions :

Si A est diagonalisable, on diagonalise A.

Sinon, on peut : - utiliser la décomposition de Dunford (ou Jordan)

- Changer de base pour reduire la matrice et simplifier les calculs.

(D) Resolution par développement en série entière

<u>Thm 12</u> : Soit (E) une équation differentielle linéaire. Si les coefficients de (E) sont developpables en série entière, alors les solutions de (E) sont aussi developpables en série entière.

<u>Application</u> : - Calcul des developpement en série entière de certaines fonctions, connaissant une equation differentielle dont elle est solution (ex : $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

- Recherche pratique des solutions d'une équation différentielle

ex : $y'' + xy' + y = 0$

III Étude de la stabilité des solutions (ici, on prendra $E = \mathbb{R}^n$).

A Stabilité

On considère y_x la solution maximale au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Def 13 On dit que x_0 est un point d'équilibre de $y' = f(y(t))$ si $f(x_0) = 0$

① On dit que x_0 est un point d'équilibre stable si pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage $U' \subset U$ de x, tel que pour tout x dans U', y_x est définie sur $\mathbb{R}_+$ et reste dans U.

② On dit que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable si
- il est stable
- s'il existe W voisinage de x_0 tel que $\forall x \in W$, y_x soit défini sur $\mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t \to +\infty} y_x(t) = x_0$

B Cas linéaire

On étudie $Y' = AY$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Prop 14 : - Si A admet une valeur propre de partie réelle positive, alors 0 est un point d'équilibre instable.

- Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative strictement, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Si les valeurs propres de A sont de partie réelle négative, et qu'il existe une valeur propre de partie réelle nulle alors, 0 est un point d'équilibre instable, sauf si les blocs de Jordan associés aux valeurs propres de partie réelle nulle sont triviaux, auquel cas, 0 est un point d'équilibre stable.

Ex : $Y' = AY$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$: 0 est un point d'équilibre instable.

C Cas non linéaire

Def 15 : On appelle système linéarisé autour de u associé à $(E) : \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = f(y) \end{cases}$ le système linéaire $y'(t) = Df(u)(y(t) - u)$, avec $Df(u)$ la matrice jacobienne de f en u, avec f C^1 telle que $f(u) = 0$

on peut aussi le considérer comme le système $\begin{cases} z' = Df(u).z \\ z(0) = y_0 - u \end{cases}$.

Théorème 16 [Stabilité de Lyapunov] [Dufr 2]

Avec les notations de la définition précédente, si les valeurs propres de $Df(u)$ sont de partie réelle strictement négative, alors

$$\begin{cases} 0 \text{ est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé} \\ u \text{ est un point d'équilibre asymptotiquement stable de } (E). \\ y(t) \text{ tend vers } u \text{ quand } t \to +\infty \text{ à une vitesse exponentielle,} \\ \quad \text{si } y_0 \text{ et } u \text{ sont assez proches.} \end{cases}$$

Références : Gourdon, Analyse

Demailly, Analyse numérique et équations différentielle.

Rouvière, Petit guide du Calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.

Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation

Lelong-Ferrand, cours de Mathématiques tome 4 : équations différentielles, intégrales multiples (difficile à trouver)

eveloppement : Théorème de Cauchy linéaire

Thm : Soit $B : I \to E$ une application continue et $A : I \to \mathcal{L}(E,E)$ une autre application continue.

Alors Pour tout problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ (E) il existe une unique solution

globale $y : I \to E$.

Demonstration

① Remarquons d'abord que ce problème équivaut à rechercher Y continue de I dans E vérifiant

$$\forall t \in I, \; Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u).Y(u) + B(u)]\, du. \quad (F)$$

En effet, toute solution Y au problème de Cauchy (E) satisfait (F), on le vérifie en dérivant Y on obtient $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, et alors, on sait que $Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} Y'(u)\,du$, d'où (F).

Réciproquement, une solution Y de (F) satisfait à la condition $Y(t_0) = y_0$.

Et en posant $\phi : t \mapsto A(t)Y(t) + B(t)$, on voit que ϕ est continue, et alors Y est une primitive de ϕ, d'où le resultat.

② Supposons I compact.

On considère la suite (Y_n), suite de fonctions definies sur I par

$$\begin{cases} Y_0(t) = y_0 \\ Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)Y_n(u) + B(u)]\, du. \; (G) \end{cases}$$

Demontrons que Y_n converge uniformement vers une fonction Y verifiant (F), et montrons ensuite qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Ⓐ On cherche a montrer la majoration suivante :

$$\forall t \in I : \; \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leq (\alpha \|y_0\| + \beta) \frac{\alpha^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$, avec α, β deux constantes.

① A et B étant deux fonctions continues, $t \mapsto \|A(t)\|$ et $t \mapsto \|B(t)\|$ sont également continues sur le compact I, et donc bornées. Appelons α et β les majorants respectifs de $t \mapsto \|A(t)\|$ et $t \mapsto \|B(t)\|$

On a $\displaystyle Y_{n+1}(t) - Y_n(t) = \int_{t_0}^{t} A(u).[Y_n(u) - Y_{n-1}(u)]\,du.$

On en deduit l'egalité $\displaystyle \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leq \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|Y_n(u) - Y_{n-1}(u)\|\,du \right|.$

De plus on a

$$\|Y_1(t)-Y_0(t)\| = \|y_1(t)-y_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \left[A(u).y_0 + B(u)\right] du\right\| \leq (\alpha\|y_0\|+\beta)(t-t_0).$$

On en deduit la relation de recurrence suivante

$$\forall t\in I \quad \|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\| \leq (\alpha\|y_0\|+\beta)\,\frac{\alpha^n|t-t_0|^{n-1}}{(n+1)!}$$

L'initialisation est déjà verifiée.

Heredité : $\|Y_{n+2}(t)-Y_{n+1}(t)\| \leq \alpha\int_{t_0}^{t}\|Y_{n+1}(u)-Y_n(u)\|\,du \underset{\text{Heredité}}{\leq} \alpha\int_{t_0}^{t}(\alpha\|y_0\|+\beta)\frac{\alpha^n(u-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}du$

Soit $\|Y_{n+2}(t)-Y_{n+1}(t)\| \leq \dfrac{\alpha^{n+1}(\alpha\|y_0\|+\beta)}{(n+1)!}\displaystyle\int_{t_0}^{t}(u-t_0)^{n+1} \leq (\alpha\|y_0\|+\beta)\frac{\alpha^{n+1}|t-t_0|^{n+2}}{(n+2)!}$

d'où la recurrence annoncée.

(B) Existence de la solution

Appelons h la longueur de I. $|t-t_0|\leq h$, donc.

$$\forall t\in I,\ \|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\| \leq (\alpha\|y_0\|+\beta)\,\frac{\alpha^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

La serie $\sum \dfrac{\alpha^n h^n}{n!}$ converge, donc la serie $\sum (Y_{n+1}(t)-Y_n(t))$ converge normalement

E étant un espace complet, la convergence normale entraine la convergence uniforme, donc $\sum Y_{n+1}(t)-Y_n(t)$ converge uniformement sur I.

On en deduit que la suite Y_n converge uniformement sur I (convergence uniforme de la suite des sommes partielles vers une limite Y

les Y_n étant continues, Y est continue.

La convergence uniforme de Y_n vers Y entraine la convergence uniforme de $A(t).Y_n(t)$ vers $A(t)Y(t)$ (car $\|A(t)Y_n(t) - A(t)Y(t)\| \leq \alpha\|Y_n(t)-Y(t)\|$)

$$\text{donc } \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} A(u)Y_n(u)\,du = \int_{t_0}^{t} A(u)Y(u)\,du.$$

Par passage à la limite dans la relation $(\hat{G})$, on a donc prouvé que Y verifie (F)

té

Supposons qu'il existe deux solutions à (F), nommes Y_1 et Y_2,

alors $X = Y_1 - Y_2$ vérifie $\forall t \in I \quad X(t) = \int_{t_0}^{t} A(u).X(u)du$.

X est continue, donc bornée sur I, d'où $\exists M, \ \forall t \in I, \ \|X(t)\| \leq M$. (1)

Montrons par récurrence que $\|X(t)\| \leq M \alpha^n \frac{|t-t_0|^n}{n!}$

C'est vrai pour $n=0$ d'après (1)

Si c'est vrai pour n, alors

$$\|X(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} A(u) \|Y(u)\| du \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \alpha \left(\frac{M\alpha^n}{n!} |u-t_0|^n \right) du \right| \leq \frac{M\alpha^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^{t} \frac{|u-t_0|^n}{n!} du$$

donc $\|X(t)\| \leq M\alpha^{n+1} \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ ce qui démontre la récurrence.

On $\lim_{n \to +\infty} \alpha^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} = 0$

donc nécessairement $X(t) = 0$ pour tout $t \in I$, donc

$Y_1 = Y_2$ ce qui montre l'unicité.

(3) le cas où I n'est pas compact.

On a montré le résultat cherché pour tout J compact inclus dans I, avec une solution Y_J. Soient deux compact J_1, J_2 inclus dans I.

Par unicité, on sait que $Y_{J_1}(t) = Y_{J_2}(t), \ \forall t \in J_1 \cap J_2$.

Alors $\forall t \in I$, on choisit un intervalle contenant t, t_0, et étant un compact inclus dans I.

La solution obtenue ne dépend pas de J,

On a donc une solution $Y : I \to E$ étant une solution au problème (E), et on voit facilement, d'après les résultats précédents, qu'elle est unique.

FIN

monstration : Théorème de Stabilité de Lyapunov

Thm : Soit f fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f(u)=0$ pour $u\in\mathbb{R}^n$ et (E): $\begin{cases} y'=f(y), \\ y(0)=y_0. \end{cases}$

Si les valeurs propres de $Df(u)$ sont de parties réelles strictement negative, alors

$\begin{cases} \cdot\ 0 \text{ est un point d'equilibre asymptotiquement stable du système linearisé de } (E) \\ \cdot\ u \text{ est un point d'equilibre asymptotiquement stable de } (E) \\ \cdot\ y(t) \text{ tend vers } u \text{ à vitesse exponentielle quand } t\to+\infty. \end{cases}$ si y_0 est proche de u.

Demonstration :

(A) Demonstration du premier point

Lemme :

Soit $a\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur continu de $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$. On note λ_i, $i\in[[1,r]]$ les valeurs propres distincte de a.

Alors $\exists P\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$|||e^{ta}||| \leq P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t\,Re(\lambda_i)}.$$

/// Demo du lemme.

On note $\chi_a(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ le polynome caracteristique de a (scindé sur $\mathbb{C}$).

D'après le lemme des noyaux

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} E_i \quad , \quad \text{avec } E_i = \ker(a-\lambda_i\,Id)^{m_i}$$

Notons $p_i : E\to E_i$ et $q_i : E_i \to E$ la projection canonique et l'injection canonique

on a $\begin{cases} p_i q_i = id_{E_i} \\ p_j q_i = 0 \text{ si } i\neq j. \\ \sum_i q_i p_i = id_E. \end{cases}$

en notant $a_i = p_i a q_i$, on a $a = \sum_i q_i a_i p_i$ et, on montre ensuite que

$$a^n = \sum_i q_i a_i^n p_i \quad \text{et donc} \quad e^{ta} = \sum_i q_i e^{ta_i} p_i.$$

Or $e^{ta_i} = e^{t\lambda_i} e^{t(a-\lambda_i id_{E_i})}$ et $a-\lambda_i id_{E_i}$ est nilpotent d'indice m_i. Donc.

$$|||e^{ta_i}||| \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!}|||a-\lambda_i id_{E_i}|||^k = e^{t\,Re(\lambda_i)}\sum_{k=0}^{m_i}\frac{|t|^k}{k!}|||a-\lambda_i id_{E_i}|||^k$$

et donc, $|||e^{ta}||| = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i}\frac{|t|^k}{k!}|||a-\lambda_i id_{E_i}|||^k\right)\sum_{i=1}^{r}\exp(t\,Re\,\lambda_i)$ ce qu'on voulait montrer ///

En assimilant "a" à sa matrice A, le lemme montre que, si toutes les parties réelles des valeurs propres λ_i de A sont strictement négative,

$$\|e^{tA}y_0\| = P(t) \sum_{j=1}^{n} e^{t\,Re(\lambda_j)}\|y_0\| \leq C e^{-\alpha t}\|y_0\|$$, or $z(t) = e^{tA}y_0$ est solution du système linéarisé, on en conclut donc que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé.

(B) Demonstration du second point et du troisième point

On considère l'application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt$$

b est une forme bilinéaire symetrique définie positive. donc

$q : x \mapsto b(x,x)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

et on a $\|\cdot\|$ la norme canonique de $\mathbb{R}^d$

On veut montrer la proposition suivante.

Proposition

$\exists \alpha, \beta > 0$ tels que si $q(y-u) \leq \alpha$, alors

$$\frac{d}{dt} q(y-u)) \leq -\beta q(y-u) \leq 0.$$

/// Notons $A = Df(u)$. $Dq(x)Ax = 2b(x, Ax) = \int_{\mathbb{R}^+} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d}{dt}(\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle) dt = -\|x\|^2$

(1) $$\frac{d}{dt}(q(y-u)) = Dq(y-u)f(y) = Dq(y-u)A(y-u) - Dq(y-u)(A(y-u) - f(y))$$

$$\frac{d}{dt}(q(y-u)) = -\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y))$$ en posant $r(y) = f(y) - A(y-u)$.

(2) En écrivant la différentiabilité de f en u, il existe $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E}(y-u) = 0$ quand $y \to u$ et tel que

$$f(y) = f(u) + A(y-u) + \sqrt{q(y-u)}\,\mathcal{E}(y-u).$$

Donc $r(y) = \sqrt{q(y-u)}\,\mathcal{E}(y-u)$

(3) Par Cauchy Schwarz appliqué à b, on obtient

$$b(y-u, r(y)) \leq \sqrt{q(y-u)}\sqrt{q(y-u)}\,\|q\mathcal{E}(y-u)\| = q(y-u)^2\sqrt{q(\mathcal{E}(y-u))}.$$

4) Par equivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$, $\exists \beta > 0$, $\|x\|^2 \geq 2\beta\, q(x)$.

donc $-\|y-u\|^2 \leq -2\beta q(y-u)$

En conclusion, pour $q(y-u) \leq \alpha$, on peut avoir $\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} \leq \beta/2$ pour α bien choisi

Donc si $q(y-u) < \alpha$; $\dfrac{d}{dt}(q(y-u)) \leq -\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y)) \leq -2\beta q(y-u) + \beta q(y-u) \leq -\beta q(y-u) \leq 0$

ce qui est ce que l'on voulait demontrer

Donc, si y est une solution maximale de (E), et $q(y_0 - u) < \alpha$.

$\forall t \in I$, $q(y-u) \leq q(y_0-u) < \alpha$.

et donc, avec $g(t) = q(y(t)-u)$

$\forall t > 0$, $g' \leq -\beta g$, donc $g(t) \leq e^{-\beta t} g(0)$, d'où

$$q(y(t)-u) \leq e^{-\beta t} q(y_0 - u).$$

donc u point d'equilibre asymptotiquement stable,

et $y(t)$ tend vers u à une vitesse exponentielle.

$\boxed{\text{FIN}}$