Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{K}$.

I - Etude Générale

1°) Existence et unicité

[Gou 351] **Def 1**: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Toute équation différentielle sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p du type : $Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t)$ (E) ; où $A_{p-1}, \dots, A_0$ sont des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ une fonction continue, est appelée équation différentielle linéaire d'ordre p.
Si $B = 0$ sur I, l'équation (E) est dite homogène.

Rmq 2: (E) peut s'écrire : $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$

On s'est donc ramené à une éq. diff. linéaire d'ordre 1. On se limitera donc à ce cas.

[Gou 352] **Thm 3** (Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soit (E) : $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$
Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution Y de (E) définie sur tout I et telle que $Y(t_0) = y_0$

[Dem p143] **C-ex 4**: $\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet au moins 2 solutions : $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$

2°) Structure de l'espace des solutions

[Gou 358] **Thm 5**: Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue, l'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (H): $Y' = A(t)Y$ est un sev de dimension n du $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$

[Gou 358] **Rmq 6**:
- l'ens. des solutions de l'E.D. (E): $Y' = A(t)Y + B(t)$ est un espace affine de dimension n. Cet ens. est $\{V + V_0 \mid V \in S_H\}$ où V_0 est une solution particulière de (E)
- les solutions d'une E.D.L. homogène sur $\mathbb{K}^n$, d'ordre p, forment un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$.

Déf 7: Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions de (H). [Gou 358]
On appelle wronskien de $V_1, \dots, V_n$ l'application
wronskien : $I \to \mathbb{K}$
$t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$

Rmq 8: Soit (H_p) une E.D.L homogène d'ordre p :
$y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y$
Soient p solutions $v_1, \dots, v_p$ de (H_p).
wronskien $(v_1, \dots, v_p)(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_p(t) \\ \vdots & & & \\ v_1^{(p-1)}(t) & \cdots & \cdots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$

Ex 9: si u et v sont deux solutions de $y'' = a_1(t)y' + a_0(t)y$
wronskien $(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$

Proposition 10: Soient $V_1, \dots, V_n$ des solutions de (H) et W = wronskien $(V_1, \dots, V_n)$. Alors, pour tout $a \in I$, on a : [Gou 368]
$\forall t \in I$, $W(t) = W(a) \exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}(A(u))\,du\right)$

Application 11: Soient $V_1, \dots, V_p$ p solutions de (H) [Pom 317]
$\exists t_0 \in I$, $(V_1(t_0), \dots, V_p(t_0))$ est libre dans $\mathbb{K}$
$\Leftrightarrow \forall t \in I$, $(V_1(t), \dots, V_p(t))$ est libre dans $\mathbb{K}$

Corollaire 12: n solutions $V_1, \dots, V_n$ de (H) forment une base de solutions de (H) ssi il existe $t_0 \in I$ tel que wronskien $(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$. Et dans ce cas, pour tout $t \in I$, wronskien $(V_1, \dots, V_n)(t) \neq 0$. [Gou 359]

App 13: Théorème d'entrelacement de Sturm [FGN 4 135]
Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'ED : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ où a et b sont des fonctions réelles continues sur I. Alors : les zéros de y_1 sont isolés et entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a un unique zéro de y_2.

II - Résolution Explicite

1°) Cas des coefficients constants

* Résolution du système homogène (H): $Y'(t) = AY(t)$

Thm 14: la solution Y telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par : $\forall t \in \mathbb{K}$, $Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0$ [Dem 201]

[Gou363] **Ex 15** : $\begin{cases} x'=x+z \\ y'=-y-z \\ z'=2y+z \end{cases}$ se met sous la forme $X'=AX$ avec $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

la solution réelle générale est :

$$t\mapsto\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\lambda e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\ \cos t+\sin t\\ -2\cos t\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}\sin t+\cos t\\ \sin t-\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix};\ (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$$

[Pom322] **App 16** : Si A et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, alors $\exp(A+B)=\exp A\exp B$

[Gou361] **Méthode 17** : E.D.L. homogène d'ordre p sur $\mathbb{K}$ à coefficients constants : $y^{(p)}+a_1y^{(p-1)}+\dots+a_py=0$ (E)

On considère le polynôme caractéristique $P(X)=X^p+a_1X^{p-1}+\dots+a_p$, et on le factorise sous la forme $P(X)=\prod_{i=1}^{k}(X-r_i)^{m_i}$. Les solutions de (E) sont les applications $t\mapsto\sum_{i=1}^{k}e^{r_it}P_i(t)$ où les P_i sont des polynômes de degré $<m_i$.

[Gou361] **Cas particulier 18** : Soit (H) : $y''+ay'+by=0$ alors $P(X)=X^2+aX+b$.

Alors dans $\mathbb{C}$,
- si P a 2 racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de (H) sont de la forme $t\mapsto\lambda_1e^{r_1t}+\lambda_2e^{r_2t}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$
- si P a une racine double r, les solutions de (H) sont de la forme : $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{rt}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$

Ex 19 : les solutions de $y''+2y'+y=0$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{-t}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}$

* Résolution du système (E) : $Y'(t)=AY(t)+B(t)$

les solutions de (E) sont de la forme $y=y_H+y_P$.

[Dem202] **Méthode 20** : (Variation des constantes)

On cherche une solution particulière sous la forme $Y_p(t)=e^{tA}.V(t)$ avec V différentiable. On trouve $V(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-uA}B(u)\,du$

Ainsi $Y_p(t)=\int_{t_0}^{t}e^{(t-u)A}B(u)\,du$ est la solution telle que $Y(t_0)=0$.

et la solution générale du problème de Cauchy telle que $Y(t_0)=V_0$ est $Y(t)=e^{(t-t_0)A}.V_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-u)A}B(u)\,du$

[Gou361] **Ex 21** : les solutions de $y'+y=\sin t$ sont de la forme $t\mapsto\frac{\sin t-\cos t}{2}+\mu e^{-t}$ où $\mu\in\mathbb{R}$

Méthode 22 : Soit (E) : $y^{(p)}+a_1y^{(p-1)}+\dots+a_{p-1}y'+a_py=e^{\lambda t}P(t)$ où les a_i et λ sont des constantes et P un polynôme de degré q. [Gou3

Soient χ le polynôme caractéristique associé et m l'ordre de multiplicité de la racine éventuelle λ de χ ($m=0$ si $\chi(\lambda)\neq0$)

Alors (E) admet une unique solution de la forme $t\mapsto t^me^{\lambda t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré $\leq q$.

Ex 23 : $y''+2y'+y=te^t$. les solutions sont $t\mapsto\left(\frac{t-1}{4}\right)e^t+(\lambda t+\mu)e^{-t}$; $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

Méthode 24 : Le système homogène (H) : $Y'=AY$ admet pour base de solutions les fonctions $V_1,\dots,V_n$. On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $Y(t)=\sum\alpha_i(t)V_i(t)$ où les $\alpha_i : I\to\mathbb{K}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$. [Dem2

Y est solution de (E) ssi $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'(t)V_i(t)=B(t)$

Par résolution, on trouve les α_i' et par intégration, les α_i

Ex 25 : $y''+4y=\tan(t)$, $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. les solutions sont de la forme $t\mapsto-\frac{t}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)\ln(\cos(t))+\alpha\cos(2t)+\beta\sin(2t)$ [Dem2

App 26 : Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que $f+f'\xrightarrow[+\infty]{}0$ alors $f\xrightarrow[+\infty]{}0$ [Pom3

2°) Cas des coefficients variables

la méthode de variation des constantes reste valable.

Thm 27 : les solutions de (H) : $y'=a(t)y$ sont de la forme $t\mapsto\lambda e^{\varphi(t)}$ où φ est une primitive de a et λ une constante [Gou35

Méthode 28 : pour trouver une solution particulière de (E) : $y'=a(t)y+b(t)$. On cherche une solution sous la forme $y_p=\lambda(t)e^{\varphi(t)}$. y_p est solution de (E) ssi λ est une primitive de $b(t)e^{-\varphi(t)}$ [Dem16

Ex 29 : $(1+t^2)y'=ty+(1+t^2)$ a pour solutions $t\mapsto K\sqrt{1+t^2}+\operatorname{argsh}(t)\sqrt{1+t^2}$, $K\in\mathbb{R}$ [Gou36

Ex 30 : $t^2y''-2y=3t^2$ a pour solutions : [Gou36

$$t\mapsto\begin{cases}\alpha_1t^2+\frac{\beta_1}{t}+t^2\ln(|t|)-\frac{t^2}{3} & \text{sur }]-\infty,0[,\ \alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}\\ \alpha_2t^2+\frac{\beta_2}{t}+t^2\ln(t)-\frac{t^2}{3} & \text{sur }]0,+\infty[\ \ \alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Méthode 31 (Liouville) [Gou36

Soit u une solution connue de (E) : $y''=a(t)y'+b(t)y+c(t)$

on cherche une deuxième solution sous la forme $y_0=uz$ où z est $\mathcal{C}^2$

On calcule y' et y'' et en remplaçant dans (E), on obtient une équation du 1er ordre en z' : $uz''=(a(t)u-2u')z'+c(t)$; que l'on peut intégrer, ce qui permet d'obtenir les solutions de (E)

[Perr 330] **Ex 32** : $(x+1)y''-y'-xy=0$ a pour solution générale sur $]-1,+\infty[$
$y(x)=Be^{x}+C(2x+3)e^{-x}$

[Meth 230] **Méthode 33** : Si l'E.D. est à coefficients polynomiaux (ou fractions rationnelles), on peut chercher si parmi les solutions, certaines sont DSE au voisinage de 0. Et l'unicité du développement permet de trouver des solutions.

[FGN4 110] **Ex 34** : Equation de Bessel : $xy''+y'+xy=0$ $\boxed{\text{DEV1}}$

III - Etude qualitative

1°) Etude de stabilité

de (E) : $y'(t)=f(y(t))$

[ZQ 380] **Déf 35** : Soit x_0 un point d'équilibre de (E) :

- x_0 est dit stable si pour $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que si x est solution de (E) qui à un instant t_0 vérifie $|x(t_0)-x_0|<\delta$ on a : - x définie pour $t\geq t_0$
  - $|x(t)-x_0|<\varepsilon$ $\forall t\geq t_0$
- x_0 est dit instable s'il n'est pas stable
- x_0 est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta>0$ tel que si x est une solution de (E) qui à un instant t_0 vérifie $|x(t_0)-x_0|<\delta$, on a : - x est définie pour $t\geq t_0$
  - $\lim_{t\to+\infty} x(t)=x_0$.

[Rouv 132] **Thm 36** : (Théorème de Lyapounov). $\boxed{\text{DEV2}}$
Soit le système différentiel $\begin{cases} y'=f(y) \\ y(0)=x \end{cases}$ avec $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0)=0$.
Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système. Plus, précisément, pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

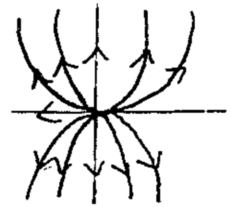
2°) Etude des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

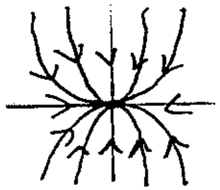
[Dem 290-294] Soit le système différentiel (S) : $Y'(t)=AY(t)$ avec $Y=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A\in GL_2(\mathbb{R})$. Soit $Y(0)=(x_0,y_0)$
L'allure des trajectoires du système dépend de la nature des valeurs propres de A.

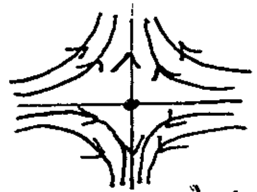
* **Cas 1** : les valeurs propres λ_1,λ_2 de A sont réelles

→ si $\lambda_1\neq\lambda_2$: Dans une base adaptée, $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et

$(S)\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt}=\lambda_2 y \end{cases}$ $\begin{cases} x(t)=x_0e^{\lambda_1 t} \\ y(t)=y_0e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

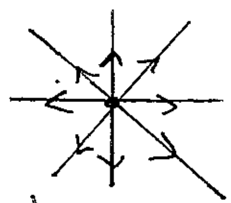

$0<\lambda_1<\lambda_2$
noeud impropre instable

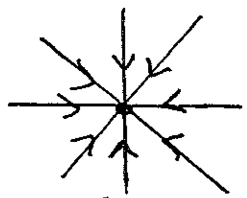

$\lambda_2<\lambda_1<0$
noeud impropre stable


$\lambda_1<0<\lambda_2$
col (instable)

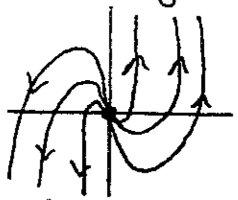
→ si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

1) A diagonalisable
$\begin{cases} x(t)=x_0e^{\lambda t} \\ y(t)=y_0e^{\lambda t} \end{cases}$


$\lambda>0$
noeud propre instable


$\lambda<0$
noeud propre stable

2) A non diagonalisable, $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x(t)=x_0e^{\lambda t} \\ y(t)=y_0e^{\lambda t}+x_0te^{\lambda t} \end{cases}$


$\lambda>0$
noeud exceptionnel instable

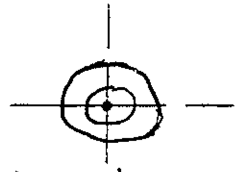

$\lambda<0$
noeud exceptionnel stable.

* **Cas 2** : les valeurs propres λ_1,λ_2 sont non réelles
On a des valeurs propres complexes conjuguées : $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ $(\beta>0)$. Il existe une base dans laquelle $A=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

$(S)\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\alpha x-\beta y \\ \frac{dy}{dt}=\beta x+\alpha y \end{cases}$


$\alpha<0$ foyer stable


$\alpha>0$ foyer instable


$\alpha=0$ centre

① Cauchy-Lipschitz linéaire : A et b sur quoi ?

② Que veut dire globalement lipschitzienne ?

③ Pourquoi dans le cas linéaire les condit° sont vérifiées ?

④ Être au point sur les versions de Cauchy-Lipschitz local/global ?

⑤ Espace des sol° des éq homogènes est un esp de dim $n \simeq \mathbb{R}^n$?

$\varphi : S_H \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme

$y \mapsto y(t_0)$

⑥ Pk le wronskien est nul partout s'il s'annule en 1 pt en utilisant la q° précédente.

⑦ Rq ce que vaut le wronskien

⑧ Th de théorème d'entrelacement de Sturm.

Développement: Equation de Bessel

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

15 janvier 2016

Référence : FGNAN4 p.101

Théorème 1 (*Equation de Bessel*)

Soit l'équation différentielle suivante (E) $\quad xy'' + y' + xy = 0$ *alors*
- il existe une unique solution f_0 *de (E) développable en série entière autour de 0 tel que* $f_0(0) = 1$ *et elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$
- Soit f_0 *définie ci-dessus et f une solution de (E) sur un intervalle* $]0, a[$ *alors* (f, f_0) *est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0*

Déjà, par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on sait que l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2 (0 est un point singulier donc il faut étudier à la main le raccordement en 0 des solutions)

Etape 1 Déterminons les solutions DSE(0) de (E). Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : soit f une solution DSE(0) de (E). Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par dérivation terme à terme d'une série entière on a :

$$0 = xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n.$$

D'après l'unicité du développement en série entière on obtient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{2n+1} &= 0 \\ a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots(2)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} a_0 \end{cases}$$

Synthèse : La série entière $a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$ a un rayon de convergence infini.

En effet, notons $u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$ de sorte que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

donc pour tout $x \geq 0$ la série $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert. Comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution f_0 DSE(0) vérifiant $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Etape 2 Soit f une solution de (E) sur $]0, a[$. Montrons que (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0 .

$\Leftarrow$ f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0. Par suite, si (f, f_0) est liée, f est aussi bornée au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ Supposons maintenant que la famille (f, f_0) soit libre. Sur $]0, a[$, (E) est équivalente à

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et (f, f_0) en est une base. Considérons le Wronskien

$$W = \begin{vmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{vmatrix} = f f_0' - f_0 f'$$

Pour tout $x \in]0, a[$ on a, en remplaçant $f''(x)$ par $-\frac{1}{x} f'(x) - f(x)$ (et de même pour f_0),

$$W'(x) = f(x) f_0''(x) - f_0(x) f''(x) = -\frac{1}{x} W(x).$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0, a[$, $W(x) = C^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ et C n'est pas nul puisque (f, f_0) est libre. Supposons que f soit bornée au voisinage de 0. Par ce qui précède et compte tenu du fait que $\lim\limits_0 f_0 = 1$ et $\lim\limits_0 f_0' = 0$ (que l'on lit sur l'expression de f_0) on obtient donc

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}.$$

Soit $b \in]0, a[$. La fonction $x \longmapsto -\frac{C}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. On en déduit par intégration des relations de comparaison

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\sim} -C \int_b^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = -C(\ln(x) - \ln(b)).$$

On a donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C \ln(x)$ puis $\lim\limits_0 f = +\infty$.

Développement: Théorème de Lyapounov

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

15 janvier 2016

Référence : Rouvière, exercice 46p138

Théorème 1 (*Théorème de Lyapounov*)

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} y' & = f(y) \\ y(0) & = x \end{cases} \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système. Plus précisément, pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Posons $A = Df(0)$.
On a d'abord besoin d'un petit lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 1

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Alors, il existe un polynôme P tel que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|e^{tA}x\| \leq P(|\, t\,|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)} \right) \|x\|$$

Démonstration : D'après le lemme de décomposition des noyaux, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a une décomposition unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_k$ avec $x_j \in E_j = Ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ où m_j est la multiplicité de la valeur propre λ_j.

$$\begin{aligned} e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j I} e^{t(A-\lambda_j I)} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \leq p < m_j} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j \end{aligned}$$

car $(A - \lambda_j I)^p x_j = 0$ pour tout $p \geq m_j$.
Si on munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme quelconque, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $1 \leq j \leq k$, une inégalité

de la forme :

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x_j\| &\leq e^{tRe(\lambda_j)} \sum_{0\leq p<m_j} \frac{t^p}{p!}\|(A-\lambda_j I)^p\|.\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j. \mid \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!} \mid \|x_j\| \text{ avec } C_j = \max_{0\leq p<m_j} \|(A-\lambda_j I)^p\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j.(1+\mid t \mid)^{m_j-1}\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C.(1+\mid t \mid)^{n-1}\|x_j\| \text{ avec } C = \max C_j
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA}x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t \mid) \sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\|x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t \mid) \max_{1\leq j\leq k} \|x_j\| \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \\
&\leq C'.P(\mid t \mid) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \|x\|
\end{aligned}$$

compte tenu de l'équivalence des normes (on est en dimension finie). Le lemme est ainsi démontré. ■

On peut maintenant passer à la preuve du théorème de Lyapounov à proprement dite.
Démonstration : Considérons le système linéarisé

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= x \end{cases} \tag{2}$$

La solution de ce système est

$$z(t) = e^{tA}x$$

D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a > 0$ tel que $Re(\lambda_j) < -a$pour tout $1 \leq j \leq k$. Et donc, pour tout $1 \leq j \leq k$,

$$P(\mid t \mid)e^{tRe(\lambda_j)}e^{at} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Donc,

$$P(\mid t \mid)e^{tRe(\lambda_j)} \leq Cste.e^{-ta}$$

Et donc d'après le lemme que l'on vient de démontrer, pour tout $t \geq 0$,

$$\|z(t)\| \leq Cste.e^{-ta}\|x\|$$

Ainsi, $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et l'origine est donc un point d'équilibre attractif.
On va maintenant essayer de se ramener au système non linéarisé.
Pour cela, on considère la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x,y) = \int_0^{+\infty} < e^{tA}x, e^{tA}y > dt$$

b est bien définie car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} < e^{tA}x, e^{tA}y > &\leq \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\| \\ &\leq Cste.e^{-2at}\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, b est clairement bilinéaire et symétrique d'après les propriétés du produit scalaire et de l'intégrale.
Soit q la forme quadratique associée à b. On a :

$$q(x) = b(x,x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt$$

Donc q est positif pour tout x, et q s'annule, si et seulement si, la fonction sous l'intégrale est nulle, c'est à dire $x = 0$. Donc, q est définie positive.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2 q(y)$$

d'où,

$$Dq(x).y = 2b(x,y)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= Dq(x).Ax \\ &= 2b(x, Ax) \\ &= \int_0^{+\infty} 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax > dt \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) = 2 < e^{tA}x, e^{tA}y >$$

Donc,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) dt \\ &= \lim_{T \to +\infty} \left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^T \\ &= -\|x\|^2 \end{aligned}$$

d'après l'étude du système linéarisé réalisée précédemment.
Donc,

$$< \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax >= 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$$

Par ailleurs, f étant C^1, on a par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (1), définie sur un intervalle de la forme $[0, a[$, où $a \in]0, +\infty]$.
Posons $r(y) = f(y) - Ay$.
On a :

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y).y' \\ &= 2b(y, y') \\ &= 2b(y, f(y)) \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \end{aligned}$$

Pour le système linéarisé, on aurait simplement $q(z)' = -\|z\|^2$. L'idée est que, r étant petit, les fonction $q(y(t))$ et $q(z(t))$ auront à peu près le même comportement pour t grand (même si pour l'instant, on ne sait pas si t peut être grand ou pas, puisqu'on a montré l'existence de y seulement sur $[0, a[$). Pour préciser cela, on va essayer de majorer $b(y, r(y))$ en utilisant q.
q étant une forme quadratique définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| b(y, r(y)) | \leq \sqrt{q(y)} \times \sqrt{q(r(y))} \tag{3}$$

Par ailleurs, par définition de la différentielle, pour une norme $\|.\|$,

$$\forall h, f(0+h) = f(0) + Df(0).h + \|h\|\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \to 0 \text{ quand } \|h\| \to 0$$

D'où,

$$f(y) - f(0) - Df(0).y = \sqrt{q(y)}\varepsilon(y)$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$[2], il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leq \alpha$, alors

$$\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon\sqrt{q(y)}$$

D'où, en injectant dans (3),

$$| 2b(y, r(y)) | \leq 2\varepsilon\sqrt{q(y)}$$

Or, par équivalence de $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, il existe une constante C_0 telle que $C_0 q(y) \leq \|y\|^2$. D'où,

$$\begin{aligned} q(y)' &= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -(C_0 - 2\varepsilon)q(y) \end{aligned}$$

On choisit alors $\varepsilon < \frac{C_0}{2}$ et on pose $\beta = C_0 - 2\varepsilon$, on a alors montré que

$$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$$

Supposons $q(x) < \alpha$. Alors montrons que $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$.
Par l'absurde, on suppose que $\exists 0 \leq t < a$ tel que $q(y(t)) \geq \alpha$. On pose $t_0 = \inf\{t \in [0, a[, q(y(t)) = \alpha\}$ (cet ensemble est non vide par le théorème des valeurs intermédiaires, $q(y(t))$ étant continue). Par continuité de $q(y(t)$, on a $q(y(t_0)) = \alpha$. D'où,

$$q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y)(t_0) = -\beta\alpha < 0$$

Donc, $q(y(t)) > \alpha$ sur un $]t_0 - \varepsilon, t_0]$, ce qui contredit la minimalité de t_0. D'où, $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$. En particulier, y reste dans un compact donc $a = +\infty$. Et

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt}\left(q(y(t)\right) \leq -\beta q(y(t))$$

or,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta t} q(y(t))\right) = e^{\beta t}\left[\beta q(y(t)) + \frac{d}{dt}\left(q(y(t)\right)\right] \leq 0$$

donc, $t \mapsto e^{\beta t} q(y(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\forall t \geq 0, e^{\beta t} q(y(t)) \leq e^{0t} q(y(o)) = q(x)$$

donc,

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Par équivalence des normes $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, 0 est donc un point d'équilibre attractif de (1) et on a donc montré le théorème de Lyapounov. ■

2. Attention à ne pas confondre ε la fonction et ε le réel > 0