221

Équations différentielles linéaires - Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle.

I. Généralité :

1) Existence et unicité :

[GOU] **Définition 1** : Soit $p\in\mathbb{N}$. Une équation différentielle linéaire d'ordre p est une équation du type $Y^{(p)}=A_{p-1}(t)Y^{(p-1)}+\dots+A_0(t)Y+B(t)$ (E) avec $A_{p-1},\dots,A_0 : I\to M_n(\mathbb{K})$ continues et $B : I\to\mathbb{K}^n$ continue. Si $B=0$ sur I, (E) est homogène.

Remarque 2 On peut ramener (E) à :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}Y\\Y'\\ \vdots\\ Y^{(p-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I_n & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & & \\ & & & & I_n\\ A_0(t) & \cdots & & & A_{p-1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y\\Y'\\ \vdots\\ Y^{(p-1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ B(t)\end{pmatrix}$$

C'est une équa. diff. linéaire d'ordre 1. On se limite à ce cas là.

Théorème 3 : (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit (E) $Y'=A(t)Y(t)+B(t)$ avec $A : I\to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I\to\mathbb{K}^n$ continues. Alors pour tout $t_0\in I$, $X_0\in\mathbb{K}^n$ il existe une unique solution Y de (E) définie sur I, et tq $Y(t_0)=X_0$.

Exemple 4 : $I=\mathbb{R}$, $n=1$, l'unique solution de $y'=\lambda y$ et $y(0)=1$ est $t\mapsto e^{\lambda t}$.

[DEM] **Contre exemple 5** : $\begin{cases}y'=3|y|^{2/3}\\ y(0)=0\end{cases}$ admet au moins deux solutions $y_1=0$ et $y_2(t)=t^3$, $t\in\mathbb{R}$.

[FGN] **Remarque 6** : Les équations singulières, de la forme $C(t)Y^{(p)}=A_{p-1}(t)Y^{(p-1)}+\dots+A_0Y+B$ où C s'annule se ramènent souvent à appliquer le théorème précédent là où C ne s'annule pas, puis à recoller les solutions si c'est possible.

Exemple : $xy'=y+x$ admet des solutions sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
$xy'=2y$ admet des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ qui se recollent en une solution sur $\mathbb{R}$.

2) Structure de l'espace des solutions :

[GOU] **Théorème 7** Soit $A : I\to M_n(\mathbb{K})$ continue. L'ensemble (S_H) des solutions maximales de (H) $Y'=A(t)Y$ est un sev de dimension n du $\mathbb{K}$-ev $C^1(I,\mathbb{K})$.

[illegible] : Les solutions de (E) $Y'=A(t)Y+B(t)$ forment un espace affine de dimension n, car si V_0 solution de (E), V sol de (E) ssi $V-V_0$ sol de (H).

Remarque 8 : Les solutions d'une EDL homogène sur $\mathbb{K}^n$, d'ordre p est un espace vectoriel de dimension np.

Exemple 9 : cos et sin sont deux solutions libres de $y''+y=0$ donc $y''+y=0$ ssi $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tq $\lambda\sin+\mu\cos=y$.

Définition 10 : Soit $(V_1,\dots,V_n)$ n solutions de H. Le wronskien est :
$\text{wronskien} : I\to\mathbb{K}$
$t\mapsto\det(V_1(t),\dots,V_n(t))$

Remarque 11 : Si (H_p) est une EDL sur $\mathbb{K}$, homogène d'ordre p, alors si $(v_1,\dots,v_p)$ forment une famille de solutions de (H_p) alors
$\text{wronskien}(v_1,\dots,v_p)=\det\begin{pmatrix}v_1 & \cdots & v_p\\ \vdots & & \vdots\\ v_1^{(p-1)} & \cdots & v_p^{(p-1)}\end{pmatrix}$.

[GOU] **Proposition 12** : Considérons $A : I\to M_n(\mathbb{C})$ continue, et (H) associée. Alors si $(V_1,\dots,V_n)$ sont n solutions de (H) on a pour $a\in I$, $\forall t\in I$
$W(t)=W(a)\exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}(A(u))\,du\right)$

Application 13 : Soient $(V_1,\dots,V_n)$ n solutions de (H). Il y a équivalence entre : (i) $\exists t_0\in I$, $(V_1(t_0),\dots,V_n(t_0))$ est libre et (ii) $\forall t\in I$, $(V_1(t),\dots,V_n(t))$ est libre. (iii) $(V_1,\dots,V_n)$ est libre dans $C^1(I,\mathbb{K})$.

Exemple 14 : cos et sin sont deux solutions de $y''+y=0$. Le wronskien associé est $\text{Wronskien}(t)=1$.

[FGN] **Théorème 15** (Entrelacement de Sturm) : Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $y''+a(t)y'+b(t)y=0$, avec a et b continues sur un intervalle I. Alors les zéros de y_1 sont isolés et entre deux zéros de y_1, il y a un unique zéro de y_2.

3) Résolvante : Soit $Y'=AY$ (H) [DEM]

Considérons l'isomorphisme pour $t_0\in I$ $\varphi_{t_0} : S_H\to\mathbb{K}^n$, $Y\mapsto Y(t_0)$.

Définition 16 Pour $(t_0,t)\in I^2$, on définit $R(t,t_0)=\varphi_t\circ\varphi_{t_0}^{-1} : \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$

On a donc $R(t,t_0)\cdot V = Y(t)$ où Y est la solution telle que $Y(t_0) = V$. On identifie $R(t,t_0)$ à sa matrice.

<u>Définition 17:</u> $R(t,t_0)$ est la résolvante de (H).

<u>Propriété 18:</u> (i) $\forall t \in I$, $R(t,t) = I_m$ (ii) $\forall (t_0,t_1,t_2) \in I^3$, $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$

(iii) $R(t,t_0)$ est solution dans $M_m(\mathbb{K})$ de $\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$ et $M(t_0) = I$

<u>Proposition 19:</u> R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2.

<u>Remarque 20:</u> Pour un système (H) ou (E), notons $\varphi(t_0, X_0, t)$ l'unique solution valant X_0 en t_0 évaluée en t. Alors $\varphi(t_0,X_0,t) = R(t,t_0)X_0$ pour tout $t_0, t \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$, donc φ est continue sur $I \times \mathbb{R}^n \times I$.

Exemple: La résolvante de $\begin{cases} x' = ty \\ y' = y \end{cases}$ est $R(t,t_0) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^{(t-t_0)} - (t_0 - 1) \\ 0 & e^{(t-t_0)} \end{pmatrix}$

II. Résolution explicite :

1) Coefficients constants :

[DEM] <u>Théorème 21:</u> La solution Y telle que $Y(t_0) = V_0$ de $dY/dt = AY$ (1) est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A}\cdot V_0$.

[GOU] <u>Exemple 22:</u> $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$ se réécrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $\frac{dY}{dt} = AY$

et alors $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda e^t + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$ $(\nu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Remarque 23:</u> Pour calculer $\exp A$, on utilise la décomposition de Dunford $D+N$.

<u>Théorème 24:</u> Considérons le système $y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0$ (E). Soit $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ le polynôme caractéristique de (E), que l'on factorise

[GOU] sous la forme $\prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i}$. Alors les solutions de (E) sont les applications $t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t)$ avec P_i des polynômes de degré $< m_i$.

[DEM] <u>Théorème 25:</u> On cherche les solutions de $Y' = AY + B$ (E). On utilise la variation de la constante, on cherche $Y(t) = e^{tA}V(t)$ où V est différentiable. La solution de (E) avec la condition $Y(t_0) = V_0$ est alors donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A}V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\,du$.

<u>Application 26</u> (du thm): Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ commutent, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp B$

Application du thm au circuit RLC en électronique.

<u>Exemple 27:</u> Les solutions de $y' + y = \sin t$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \mu e^{-t}$.

<u>Méthode 28:</u> Supposons que le système $y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_0 y$ se mette sous la forme $Y' = AY + B(t)$. Alors on suppose qu'on a une

[DEM] base de solution $(V_1, \dots, V_p)$ de $Y' = AY$. On cherche une solution sous la forme $Y(t) = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_p V_p$ avec (α_i) des fonctions. On obtient pour (α_i) dérivable : $\sum \alpha_i' V_i = B(t)$. Que l'on résout pour trouver la solution particulière. C'est la variation des constantes.

<u>Exemple 29:</u> On résout $y'' + 4y = \tan t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \pi/2[$.

[POM] <u>Application 30:</u> Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[, \mathbb{C})$ tq $f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Alors $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

2) Coefficients variables :

<u>Théorème 31</u> (dimension 1) : Les solutions de $y' = a(t)y$ sont les $\lambda e^{\varphi(t)}$ où φ est une primitive de a et λ une constante. [G

<u>Méthode 32:</u> Si on veut résoudre $y' = a(t)y + b$, on utilise la variation de la constante.

<u>Exemple 33:</u> On résout $(1+t^2)y' = ty + (1+t^2)$

<u>Technique 34:</u> (abaissement de l'ordre) : Si on connaît une solution φ de $y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y$ (E), alors on cherche une solution f de (E) sous la forme $f = \varphi g$. f solution de (E) ssi [G

g' solution d'une équation d'ordre $(p-1)$. Cela permet en particulier de résoudre $y'' = a(t)y' + b(t)y$ en ne connaissant qu'une solution.

<u>Exemple 35:</u> $(x+1)y'' - y' - xy = 0$ a pour solution sur $]-1,+\infty[$ $y = Be^{x} + c(2x+3)e^{-x}$

<u>Méthode 36:</u> Pour résoudre les équations d'Euler $t^n y^{(n)} + \dots + a_{n-1} t y' + a_n y = 0$ avec (a_i) des constantes complexes, on peut poser $t = e^x$, et on

obtient alors une équation linéaire homogène à coefficients constants.

[GOU] Application 37 : Les fonctions $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient $f'(t)=f(1/t)$ ie $f'(t) = f(1/t)$ pour $t>0$.

3) Recherche de solutions particulières :

Méthode 38 : On peut rechercher une solution sous la forme d'une série entière

[FGN4] Application 39 : Considérons $xy''+y'+xy=0$ alors : il existe une unique solution f_0 de (E) développable en série entière autour de 0 tq $f_0(0)=1$ et elle est définie par $f_0(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$

DEV

• Soit f_0 définie ci-dessus et f une solution de (E) sur $]0,a[$. Alors (f,f_0) est libre ssi f est non bornée au voisinage de 0.

(FGN) Remarque 40 : À partir de relations entre les coefficients d'une série entière, on peut à l'inverse établir l'équation différentielle que sa somme vérifie, et la résoudre pour expliciter les coefficients. Appli : nombre de Bell.

(FGN) Méthode 41 : On peut utiliser un développement en série de Fourier pour un second membre égal à sa série de Fourier.

Appli 42 : Résolution de $y''+y=|\sin x|$

III. Études qualitatives :

1) Stabilité :

(ROU) Théorème (de Lyapounov) 43 : Considérons le système différentiel $\begin{cases} y'=f(y)\\ y(0)=x\end{cases}$ avec $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $f(0)=0$. Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, pour x assez voisin de 0, la solution $y_x(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$

DEV

2) Études de systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$:

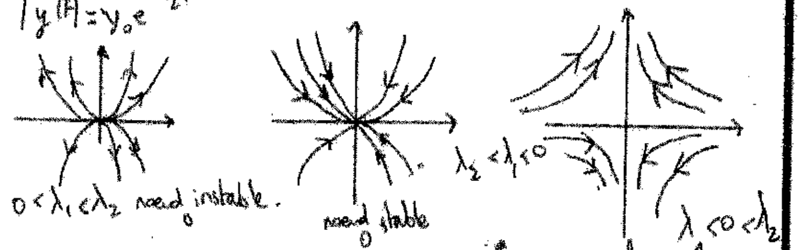
[DEM] Considérons (S) $Y'=AY$ avec $Y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$

L'allure des solutions dépend des valeurs propres de A.

Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par homothéties

• Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Dans une bonne base, $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda_1 t}\\ y(t)=y_0 e^{\lambda_2 t}\end{cases}$



On peut étudier si $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$, A diagonalisable ou non diagonalisable et si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$.

3) Étude de $y''+q(t)y=0$: (E)

Proposition 44 : Considérons $y''+q(t)y=0$ avec $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue et intégrable. Alors (E) admet des solutions non bornées

(GOU) et [FGN] Proposition 45 : Si (E) est tel que $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^-$ est continue strictement négative, alors la seule solution bornée est nulle, et si f est une solution non nulle, elle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ et vérifie : f^2/x admet une limite en $+\infty$.

Proposition 46 : Considérons $y''+qy=0$ avec $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ continue croissante. Alors si y est solution, y est bornée.

Proposition 47 : Soit l'équation $y''+qy=0$ avec $q:(a,b)\to\mathbb{R}$ continue. Si cette équation admet une solution non nulle $C^2((a,b),\mathbb{R})$ qui vérifie $y(a)=y(b)=0$ alors on a l'inégalité : $\int_a^b |q(t)|\,dt \geq \frac{4}{b-a}$.

(GOU) Gourdon, Analyse
(DEM) Demailly, Anum des equa diff
[FGN] X-ENS 4 Analyse, Gianella, Francinou, Nicolas
(HAU) Hauchecorne, contrexemp
(ROU) Rouvière
(Pom) Pommellet, Cours d'analyse

Développement: Equation de Bessel

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

15 janvier 2016

Référence : FGNAN4 p.101

Théorème 1 ***(Equation de Bessel)***

Soit l'équation différentielle suivante (E) $\quad xy'' + y' + xy = 0$ *alors*
- il existe une unique solution f_0 de (E) développable en série entière autour de 0 tel que $f_0(0) = 1$ et elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$
- Soit f_0 définie ci-dessus et f une solution de (E) sur un intervalle $]0, a[$ alors (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0

Déjà, par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on sait que l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2 (0 est un point singulier donc il faut étudier à la main le raccordement en 0 des solutions)

Etape 1 Déterminons les solutions DSE(0) de (E). Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : soit f une solution DSE(0) de (E). Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par dérivation terme à terme d'une série entière on a :

$$0 = xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n.$$

D'après l'unicité du développement en série entière on obtient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{2n+1} &= 0 \\ a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2(2n-2)^2 \cdots (2)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0 \end{cases}$$

Synthèse : La série entière $a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$ a un rayon de convergence infini.
En effet, notons $u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$ de sorte que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

donc pour tout $x \geq 0$ la série $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert. Comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution f_0 DSE(0) vérifiant $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Etape 2 Soit f une solution de (E) sur $]0, a[$. Montrons que (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0 .

$\Leftarrow$ f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0. Par suite, si (f, f_0) est liée, f est aussi bornée au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ Supposons maintenant que la famille (f, f_0) soit libre. Sur $]0, a[$, (E) est équivalente à

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et (f, f_0) en est une base. Considérons le Wronskien

$$W = \begin{vmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{vmatrix} = f f_0' - f_0 f'$$

Pour tout $x \in]0, a[$ on a, en remplaçant $f''(x)$ par $-\frac{1}{x} f'(x) - f(x)$ (et de même pour f_0),

$$W'(x) = f(x) f_0''(x) - f_0(x) f''(x) = -\frac{1}{x} W(x).$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0, a[$, $W(x) = C^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ et C n'est pas nul puisque (f, f_0) est libre. Supposons que f soit bornée au voisinage de 0. Par ce qui précède et compte tenu du fait que $\lim_0 f_0 = 1$ et $\lim_0 f_0' = 0$ (que l'on lit sur l'expression de f_0) on obtient donc

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}.$$

Soit $b \in]0, a[$. La fonction $x \longmapsto -\frac{C}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. On en déduit par intégration des relations de comparaison

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\sim} -C \int_b^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = -C(\ln(x) - \ln(b)).$$

On a donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C \ln(x)$ puis $\lim_0 f = +\infty$.

Développement: Théorème de Lyapounov

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

15 janvier 2016

Référence : Rouvière, exercice 46p138

Théorème 1 (*Théorème de Lyapounov*)

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= x \end{cases} \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système. Plus précisément, pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Posons $A = Df(0)$.

On a d'abord besoin d'un petit lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 1

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Alors, il existe un polynôme P tel que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|e^{tA}x\| \leq P(|\ t\ |)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right)\|x\|$$

Démonstration : D'après le lemme de décomposition des noyaux, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a une décomposition unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_k$ avec $x_j \in E_j = Ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ où m_j est la multiplicité de la valeur propre λ_j.

$$\begin{aligned} e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j I}e^{t(A-\lambda_j I)}x_j \\ &= e^{t\lambda_j}\left(\sum_{0 \leq p < m_j} \frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j I)^p\right)x_j \end{aligned}$$

car $(A - \lambda_j I)^p x_j = 0$ pour tout $p \geq m_j$.

Si on munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme quelconque, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $1 \leq j \leq k$, une inégalité de la forme :

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x_j\| &\leq e^{tRe(\lambda_j)} \sum_{0\leq p<m_j} \frac{t^p}{p!}\|(A-\lambda_j I)^p\|.\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j. \mid \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!} \mid \|x_j\| \text{ avec } C_j = \max_{0\leq p<m_j} \|(A-\lambda_j I)^p\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j.(1+\mid t\mid)^{m_j-1}\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C.(1+\mid t\mid)^{n-1}\|x_j\| \text{ avec } C = \max C_j
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA}x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t\mid)\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\|x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t\mid)\max_{1\leq j\leq k}\|x_j\|\left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \\
&\leq C'.P(\mid t\mid)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right)\|x\|
\end{aligned}$$

compte tenu de l'équivalence des normes (on est en dimension finie). Le lemme est ainsi démontré. ■

On peut maintenant passer à la preuve du théorème de Lyapounov à proprement dite.
Démonstration : Considérons le système linéarisé

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= x \end{cases} \tag{2}$$

La solution de ce système est

$$z(t) = e^{tA}x$$

D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a > 0$ tel que $Re(\lambda_j) < -a$pour tout $1 \leq j \leq k$. Et donc, pour tout $1 \leq j \leq k$,

$$P(\mid t\mid)e^{tRe(\lambda_j)}e^{at} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Donc,

$$P(\mid t\mid)e^{tRe(\lambda_j)} \leq Cste.e^{-ta}$$

Et donc d'après le lemme que l'on vient de démontrer, pour tout $t \geq 0$,

$$\|z(t)\| \leq Cste.e^{-ta}\|x\|$$

Ainsi, $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et l'origine est donc un point d'équilibre attractif.
On va maintenant essayer de se ramener au système non linéarisé.
Pour cela, on considère la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x,y) = \int_0^{+\infty} < e^{tA}x, e^{tA}y > dt$$

b est bien définie car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} < e^{tA}x, e^{tA}y > &\leq \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\| \\ &\leq Cste.e^{-2at}\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, b est clairement bilinéaire et symétrique d'après les propriétés du produit scalaire et de l'intégrale.
Soit q la forme quadratique associée à b. On a :

$$q(x) = b(x,x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt$$

Donc q est positif pour tout x, et q s'annule, si et seulement si, la fonction sous l'intégrale est nulle, c'est à dire $x = 0$. Donc, q est définie positive.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2q(y)$$

d'où,

$$Dq(x).y = 2b(x,y)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= Dq(x).Ax \\ &= 2b(x, Ax) \\ &= \int_0^{+\infty} 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax > dt \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) = 2 < e^{tA}x, e^{tA}y >$$

Donc,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) dt \\ &= \lim_{T\to+\infty} \left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^T \\ &= -\|x\|^2 \end{aligned}$$

d'après l'étude du système linéarisé réalisée précédemment.
Donc,

$$< \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax >= 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$$

Par ailleurs, f étant C^1, on a par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (1), définie sur un intervalle de la forme $[0, a[$, où $a \in]0, +\infty]$.
Posons $r(y) = f(y) - Ay$.
On a :

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y).y' \\ &= 2b(y, y') \\ &= 2b(y, f(y)) \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \end{aligned}$$

Pour le système linéarisé, on aurait simplement $q(z)' = -\|z\|^2$. L'idée est que, r étant petit, les fonction $q(y(t))$ et $q(z(t))$ auront à peu près le même comportement pour t grand (même si pour l'instant, on ne sait pas si t peut être grand ou pas, puisqu'on a montré l'existence de y seulement sur $[0, a[$). Pour préciser cela, on va essayer de majorer $b(y, r(y))$ en utilisant q.
q étant une forme quadratique définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| b(y, r(y)) | \leq \sqrt{q(y)} \times \sqrt{q(r(y))} \tag{3}$$

Par ailleurs, par définition de la différentielle, pour une norme $\|.\|$,

$$\forall h, f(0+h) = f(0) + Df(0).h + \|h\|\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \to 0 \text{ quand } \|h\| \to 0$$

D'où,

$$f(y) - f(0) - Df(0).y = \sqrt{q(y)}\varepsilon(y)$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$[2], il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leq \alpha$, alors

$$\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon\sqrt{q(y)}$$

D'où, en injectant dans (3),

$$| 2b(y, r(y)) | \leq 2\varepsilon\sqrt{q(y)}$$

Or, par équivalence de $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, il existe une constante C_0 telle que $C_0 q(y) \leq \|y\|^2$. D'où,

$$\begin{aligned} q(y)' &= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -(C_0 - 2\varepsilon)q(y) \end{aligned}$$

On choisit alors $\varepsilon < \frac{C_0}{2}$ et on pose $\beta = C_0 - 2\varepsilon$, on a alors montré que

$$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$$

Supposons $q(x) < \alpha$. Alors montrons que $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$.
Par l'absurde, on suppose que $\exists 0 \leq t < a$ tel que $q(y(t)) \geq \alpha$. On pose $t_0 = \inf\{t \in [0, a[, q(y(t)) = \alpha\}$ (cet ensemble est non vide par le théorème des valeurs intermédiaires, $q(y(t))$ étant continue). Par continuité de $q(y(t)$, on a $q(y(t_0)) = \alpha$. D'où,

$$q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y)(t_0) = -\beta\alpha < 0$$

Donc, $q(y(t)) > \alpha$ sur un $]t_0 - \varepsilon, t_0]$, ce qui contredit la minimalité de t_0. D'où, $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$. En particulier, y reste dans un compact donc $a = +\infty$. Et

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt}\left(q(y(t)\right) \leq -\beta q(y(t))$$

or,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta t}q(y(t))\right) = e^{\beta t}\left[\beta q(y(t)) + \frac{d}{dt}\left(q(y(t)\right)\right] \leq 0$$

donc, $t \mapsto e^{\beta t}q(y(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\forall t \geq 0, e^{\beta t}q(y(t)) \leq e^{0t}q(y(o)) = q(x)$$

donc,

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(x) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Par équivalence des normes $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, 0 est donc un point d'équilibre attractif de (1) et on a donc montré le théorème de Lyapounov. ∎

2. Attention à ne pas confondre ε la fonction et ε le réel > 0