Équation différentielles linéaires, Système d'équation différentielles linéaires. Exemple et application.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$
E un $\mathbb{K}$-ev, $n = \dim E$

I Généralités sur les équations différentielles linéaires (EDL)

Def 1: On appelle problème de Cauchy (PDC) la donnée d'un système d'équations différentielles et d'une condition initiale.
Le problème est dit linéaire si le système d'équation différentielles est linéaire.
i.e. de la forme $\sum_{i=0}^{p} A_i X^{(i)} = B$ où $B \in \mathcal{C}(I,E)$ et $\forall i$ $A_i \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$. On dit que le système de EDL est d'ordre p.

Prop 2: Pour $\mathcal{E} : X^{(p)} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} A_i X^{(i)}\right) + B$, en posant $Y = (X, X', \dots, X^{(p-1)})^T$ on se ramène à

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{n(p-1)} & \\ 0 & & \\ A_0(t) & A_1(t) \cdots & A_{(p-1)}(t) \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Donc à une EDL d'ordre 1.

Theo 3: (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Dev 1

Tout PDC de la forme $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
avec $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$,
$B \in \mathcal{C}(I,E)$
$X_0 \in E$
admet une unique solution globale.

Coroll 4: Il existe une unique solution au PDC
$\begin{cases} x^{(p)} = \left(\sum a_i x^{(i)}\right) + b \\ (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(p-1)}(t_0)) \end{cases}$

Ex 5: $\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$
à une unique solution
$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Rmq 6: Dans le cas où A_p n'est pas inversible sur I, on résoud sur les parties de I où A_p est inversible et on rassemble ensuite si possible.

Ex 7:
- $ty' = y + t$ admet des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
- $ty' = 2y$ admet des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Les solutions se raccordent éventuellement en des solutions sur $\mathbb{R}$.

II Structure de l'espace des solutions.

Notation 8: Soit l'équation $\mathcal{E}$:
$X' = AX + B$ où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $B \in \mathcal{C}(I,E)$. On note $\mathcal{E}_H$ l'équation homogène associée ($X' = AX$), $S_{\mathcal{E}}$, resp $S_{\mathcal{E}_H}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$, resp $\mathcal{E}_H$.

1° Espace vectoriel, espace affine

Théo 9: $S_{\mathcal{E}_H}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I,E)$ de dimension n et $\forall t_0 \in I$
$S_{\mathcal{E}_H} \to E$
$x \to x(t_0)$
est un isomorphisme.

Rmq 10: Si $x \in S_{\mathcal{E}}$ alors
($\tilde{x} \in S_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow x - \tilde{x} \in S_{\mathcal{E}_H}$).
En pratique on détermine $S_{\mathcal{E}_H}$ et une valeur particulière de $S_{\mathcal{E}}$ pour déterminer $S_{\mathcal{E}}$.

Coroll 11: $\dim S_{\mathcal{E}} = \dim S_{\mathcal{E}_H} = n$ et $S_{\mathcal{E}}$ est un espace affine de direction vectoriel $S_{\mathcal{E}_H}$.

Rmq 12: L'espace des solutions d'une EDL d'ordre p est np.

2° Le Wronskien et les systèmes fondamentaux.

Def 13: A toute famille de n solutions $(x_1, \dots, x_n) : I \to E$ de $\mathcal{E}_H$ on associe le Wronskien $W : I \to K$ défini par
$W(t) = \det(x_1(t), \dots, x_n(t))$

Prop 14: (Formule de Liouville-Ostrogradskii). Le Wronskien de n solutions $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{E}_H$ est égal à $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(u))\,du\right)$

Coroll 15: On a équivalence entre:
i) $\exists t_0 \in I$ tq $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$ soit libre
ii) $\forall t \in I$ $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est libre
iii) $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans $\mathcal{C}^1(I,E)$

Def 16: Un système fondamental de solution (SF) de $\mathcal{E}_H$ est une base de $S_{\mathcal{E}_H}$. Une matrice fondamentale est une matrice dont les colonnes forme un (SF).

Prop 17 : Soit ϕ et Ψ deux matrices fondamentale de $\mathcal{E}_H$. Il existe une matrice constante C tq $\forall t \in I, \phi(t) = C\Psi(t)$.

Prop 18 : Une fonction matricielle ϕ est une matrice fondamentale de $\mathcal{E}_H$ ssi elle est solution inversible de $M' = AM$.

Rmq 19 : On cherche donc un (SF) de $\mathcal{E}_H$ pour ressoudre $S_{\mathcal{E}_H}$ et on utilise le Wronskien pour déterminer si une famille candidate $(x_1, \dots, x_n)$ est un (SF).

Ex 20 : cos et sin sont solutions de $y'' + y = 0$. $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ donc $(\cos, \sin)$ est un (SF).

Theo 21 : (Entrelacement de Strum) Soit y_1 et y_2, 2 solutions linéairements indépendante de $y'' + a_1 y + a_0 = 0$. Alors les zeros de y_1 sont isolé et entre deux zeros de y_1 il existes un unique zero de y_2.

III Résolution théorique et résolvante

On considère l'équation homogène à valeur dans $\mathcal{L}(E)$: $U' = A \circ U$ $(\mathcal{E}_R)$.

Def 22 : On appelle résolvante de $\mathcal{E}_R$ de CI (t_0, Id) l'unique solution de $\mathcal{E}_R$ de CI (t_0, Id) notée $t \in I \to \mathcal{R}(t, t_0) \in \mathcal{L}(E)$

Prop 23 : $\mathcal{R}$ est C^1 sur I^2.

Theo 24 : $X(t) = \mathcal{R}(t, t_0) X_0$ est l'unique solution du PDC $(\mathcal{E}_H, (t_0, X_0))$

Rmq 25 : Soit $\varphi_{t_0} : S_{\mathcal{E}_H} \to E$, $X \to X(t_0)$

$$\mathcal{R}(t, t_0) = \varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}$$

Prop 26 : $\forall u, v, w \in I$:
- $\mathcal{R}(u,v)\mathcal{R}(v,w) = \mathcal{R}(u,w)$
- $\mathcal{R}(u,u) = I_d$
- $\mathcal{R}(u,v)^{-1} = \mathcal{R}(v,u)$

Prop 27 : $\forall t \in I$, si M est une matrice fondamentale de $\mathcal{E}_H$ alors $M(t) = \mathcal{R}(t, t_0) M(t_0)$.

Prop 28 : Une fonction matricielle $\overline{R}$ $I \times I \to \mathcal{M}_n$ est une resolvante ssi il existe une matrice fondamentale Φ tq $\overline{R}(t, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)$.

Prop 29 : $W_{t_0}(t) := \det(R(t, t_0))$ est solution de $\begin{cases} Z' = Tr(A) Z \\ Z(t_0) = 1 \end{cases}$

Theo 30 : La solution du (PDC) $(\mathcal{E}, (t_0, X_0))$ est donnée par

$$X(t) = R(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s) B(s) ds$$

$\forall t \in I$.

IV Résolution explicite avec A constant

1° Résolution partie homogène

Prop 31 : $\forall t_0, t$ $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$

La solution pour la donnée initiale (t_0, X_0) est $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$.

Appli (Admis) 32 : Si $\varphi : \mathbb{R} \to GL(\mathbb{K})$ vérifie $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = e^{tA}$.

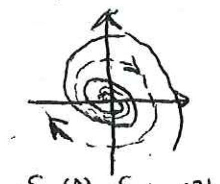
On cherche donc à calculer $e^{(t-t_0)A}$:

Methode 33 : Si χ_A scindé, on utilise la décomposition de Dunford
- Si A diagonalisable $e^{tA} \sim \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t})$
- Si $(A - \lambda I_d)$ nilpotent
$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(A - \lambda I_n)^k}{k!} t^k \right)$$

Prop 34 : $\begin{cases} \forall X \lim_{t \to +\infty} \| e^{tA} X \| = +\infty \Leftrightarrow \forall z \in Sp(A), Re(z) > 0. \\ \forall X \lim_{t \to +\infty} e^{tA} X = 0 \Leftrightarrow \forall z \in Sp(A), Re(z) < 0. \end{cases}$

Ex 35 : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - y \end{cases}$

$Sp(A) = \{\pm 1\}$



$Sp(A) = \{-j, -j^2\} \subset \{z : Re z > 0\}$

2° Résolution partie non homogène

Méthode : On cherche des solutions de la forme $X(t) = e^{tA} k(t)$ de E

Ex 36 : L'équation $y' = y + e^t$ admet une solution générale $y(t) = c_0 e^t + t e^t, c_0 \in \mathbb{R}$

Theo 37 : La solution pour la donnée initiale (t_0, X_0) est $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s) ds$

Appli 38 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ tq $f' + f \underset{+\infty}{\to} 0$. Alors $f \underset{+\infty}{\to} 0$.

IV Résolution quelconque

Méthode 39 : (Réduction de l'ordre)

Soit $(\varphi_1 \dots \varphi_r)$ des solutions linéairement indépendante d'une équation d'ordre p.

Soit $P = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_r' & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n)}(t) & \cdots & \varphi_r^{(n)} & I_{p-r} \end{pmatrix}$

Posons $x(t) = P(t) y(t)$.

On en déduit une EDL d'ordre $p-r$.

Appli 40 : Permet de résoudre $y'' + a_1 y' + a_0 y$ en ne connaissant qu'une solution

Ex 41 : Pour $(t+1) y'' - y' - ty = 0$

En partant de la solution évidente $\varphi_1(t) = e^t$ et en posant $f(t) = g(t) e^t$ on trouve f solution ssi $u = g'$ est solution de l'équation d'ordre 1 : $(t+1) u' + (2t+1) u = 0$

Méthode 42 : Pour $(\sum a_i t^i x^{(i)}(t)) = 0$ avec $\forall i \; a_i \in \mathbb{C}$ on utilise le changement de variable $t = e^u$. On obtient une équation à coefficient constant

Ex 43 : $t^2 y''(t) + t y'(t) + y = 0$ devient $g''(u) + g(u) = 0$ avec $g = y \circ \exp$.

Méthode 44 : Recherche d'une solution sous forme d'une série entière.

Ex. 45 : $(t^2+1) y'' + y = 0$ revient à $a_n = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)+1} a_{n-2}$

Rmq 46 : Réciproquement on peut utiliser des relations de récurrence entre coefficient pour établir l'équation différentielle et en déduire la valeur des coefficients.

V Étude qualitative

Theo 48 : (Lyapunov) soit le système $y' = f(y)$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, $y(0) = x$

Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propre de partie réelle strictement négative alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système.

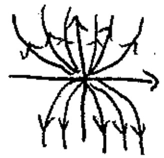
DEV 2

Appli 49 :

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

alors $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

$0 < \lambda_1$, $0 < \lambda_2$



O instable

$0 > \lambda_1$, $0 > \lambda_2$

O stable

$0 < \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$