221

Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}^*$. I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I] Définitions ; existence et unicité des solutions

1. Équations différentielles linéaires

[GOU]

Déf. 1 : L'équation différentielle sur $\mathbb{K}^N$ d'ordre n

$$y^{(n)} = A_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + A_0(t)\, y + b(t) \qquad (E_n)$$

où les $A_i \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$, est appelée équation différentielle linéaire d'ordre n.

Déf. 2 : Si $b = 0$, l'équation différentielle linéaire (E_n) est dite homogène.

Ex. 3 : • $y' = \cos y$ n'est pas linéaire.
• $y' + y = 0$ est linéaire homogène

[GOU]

Prop. 4 : Toute équation différentielle linéaire d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$ peut se ramener à l'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{Nn}$.
Si $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \\ A_0(t) & \dots & & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$,

alors (E_n) devient $Y' = A(t)Y + B(t)$. $\quad (E)$

Ex. 5 : $y'' + 4ty' + 2y = e^t$ devient $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$.

2. Solutions

[QUE]

Déf. 6 : Une solution (y_2, J_2) prolonge une solution (y_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et si $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.

Déf. 7 : Une solution (y, J) est maximale si elle n'admet aucun prolongement. Si $J = I$, (y, J) est dite globale.

[BER]

Prop. 8 : Les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire sont globales.

Ex. 9 : $y(t) = e^{-t}$ est solution maximale sur $\mathbb{R}$, donc globale, de l'équation différentielle linéaire $y' + y = 0$.

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire [BER]

Prop. 10 : Lemme de Grönwall.
Soient $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et pour tout $t \in I$, $u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, ds \right|$.
Alors, pour tout $t \in I$, $u(t) \leq a \exp\left| \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \right|$.

Th. 11 : Cauchy-Lipschitz linéaire.
Soient $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors : il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}^N$ de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

II] Propriétés des solutions

1. Ensemble des solutions [BER]

Notation 12 : On note S l'ensemble des solutions maximales de (E), et S_H l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène $Y' = A(t)Y$. $\quad (E_H)$.

Prop. 13 : Structure de S_H.
(i) L'ensemble S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$.
(ii) Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0} : \begin{array}{l} S_H \to \mathbb{K}^N \\ y \mapsto y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
(iii) $\dim(S_H) = N$.

Cor. 14 : Structure de S.
L'ensemble S est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Prop. 15 : solution générale = solution homogène + solution particulière.

Ex. 16 : $y' = 2y + 1$.
$y_H = Ce^{2t}$; $y_P = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $y = Ce^{2t} - \frac{1}{2}$.

Prop. 17 : (EDL scalaire d'ordre 1.) Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. La solution maximale de $y' = a(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$, est :

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma\right) ds.$$

2. Stabilité des solutions

[BER]

Déf.18 : On note y_{t_0,y_0} la solution maximale de (E) telle que $y(t_0)=y_0$.
La solution y_{t_0,y_0} est stable si :
(i) Il existe $\alpha>0$, tel que pour tout $y_1\in\mathbb{K}^N$ tel que $\|y_1-y_0\|\le\alpha$, la fonction $y_{t_0,y_1}(t)$ est définie pour tout $t\ge t_0$.
(ii) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta\in]0,\alpha]$ tel que, pour tout $y_1\in\mathbb{K}^N$, si $\|y_1-y_0\|\le\eta$, alors $\|y_{t_0,y_1}(t)-y_{t_0,y_0}(t)\|\le\varepsilon$ pour tout $t\ge t_0$.

Déf.19 : La solution y_{t_0,y_0} est asymptotiquement stable si :
(i) elle est stable
(ii) Il existe $\delta>0$ tel que $(y_{t_0,y_1}(t)-y_{t_0,y_0}(t))\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ pour tout $y_1\in\mathbb{K}^N$ tel que $\|y_1-y_0\|\le\delta$.

Prop.20 : (Cas linéaire homogène.) (ADMIS.) (E) possède une solution stable (resp. asymptotiquement stable) si et seulement si toutes les solutions de (E) sont stables (resp. asymptotiquement stables).

Rem.21 : Étudier la stabilité de la solution nulle est donc suffisant pour étudier la stabilité de S_H.

Th.22 : Soit $A\in M_N(\mathbb{C})$. Notons λ_j les valeurs propres de A. Les solutions de l'équation homogène (E_H) : $y'=Ay$ sont :
- stables si et seulement si, pour tout j, $\{Re(\lambda_j)<0\}$ ou $\{Re(\lambda_j)=0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable$\}$.
- asymptotiquement stables si et seulement si, pour tout j, $Re(\lambda_j)<0$.

Ex.23 : $Y'=\begin{pmatrix}0&1\\-3&-4\end{pmatrix}Y$. A a pour valeurs propres -1 et -3, donc les solutions sont asymptotiquement stables.

[ROU]

Déf.24 : Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{K}^N)$. On suppose $f(0)=0$ et on note $Df(0)=A$. Le système linéarisé de $y'=f(y)$, $y(0)=x$ au voisinage du point d'équilibre 0 est $z'=Az$, $z(0)=x$.

App.25 : (Théorème de stabilité de Liapounov.) Soient $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$, $y'=f(y)$, $y(0)=x$ et $f(0)=0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, 0 est une solution asymptotiquement stable.

III] Résolution explicite

1. Résolvante et wronskien

[DEM]

Déf.26 : Un système fondamental de solutions de (E_H) est une famille $(y_1,\dots,y_N)$ de N solutions indépendantes de (E_H).

Déf.27 : Pour tout $(t,t_0)\in I^2$, on définit $R(t,t_0)=\phi_t\circ\phi_{t_0}^{-1}$: $\mathbb{K}^N\xrightarrow{\phi_{t_0}^{-1}}S_H\xrightarrow{\phi_t}\mathbb{K}^N$, $Y_0\longmapsto Y\longmapsto Y(t)$
la résolvante du système linéaire homogène (E_H).

Prop.28 : $R(t,t_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^N$ dans $\mathbb{K}^N$.

Prop.29 : $\frac{d}{dt}R(t,t_0)=A(t)R(t,t_0)$.

Propriétés 30 : (i) Pour tout $t\in I$, $R(t,t)=I_N$.
(ii) Pour tout $(t_0,t_1,t_2)\in I^3$, $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0)=R(t_2,t_0)$
(iii) $R(t,t_0)$ est la solution dans $M_N(\mathbb{R})$ de $\frac{dM}{dt}=A(t)M(t)$ avec $M(t_0)=I_N$.

Prop.31 : La solution de $Y'=A(t)Y$, $Y(t_0)=Y_0$ est $Y(t)=R(t,t_0).Y_0$.

Déf.32 : Si $(y_1,\dots,y_N)$ est un système fondamental de solutions de (E_H), on appelle wronskien de (E_H) : $W(t)=\det(y_1(t),\dots,y_N(t))$.

[BER]

Ex.33 : $y''-2y'+y=0$. $y_1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\e^t\end{pmatrix}$, $y_2(t)=\begin{pmatrix}te^t\\(t+1)e^t\end{pmatrix}$ $\Rightarrow W(t)=e^{2t}$.

Prop.34 : (Identité d'Abel.) Soit $W(t)$ le wronskien de (E_H). $W(t)$ vérifie : $W'(t)=tr(A(t))W(t)$, et alors $W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}Tr(A(s))ds\right)$.

Ex.35 : Dans l'ex.33, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$. On a bien $W'(t)=2e^{2t}=Tr(A(t))W(t)$.

2. Cas particulier des coefficients constants [BER]

Dans cette partie, $A\in M_N(\mathbb{K})$ et (E_H) : $Y'=AY$.

Déf.36 : $e^A=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{A^p}{p!}$ est appelée exponentielle de la matrice A.

App.37 :
- Si $A=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$, $\exp(tA)=diag(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_N t})$.
- Si A est diagonalisable, $A=PDP^{-1}$ où $D=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$, $\exp(tA)=P\exp(tD)P^{-1}$.
- Si $A=\lambda Id+R$ où $R=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\varepsilon_{N-1}\\0&&&0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}$. Alors $\exp(tA)=e^{\lambda t}\sum_{p=0}^{N-1}\frac{t^p}{p!}R^p$.

Ex.38 : $\begin{cases}x'=2x+y\\y'=2y\end{cases}$ se réécrit $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On a $A = 2I_d + R$ d'où $\exp(tA) = e^{2t}\exp(tR) = e^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Prop. 39 : On pose $f(t) = e^{tA}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Prop. 40 : (i) Si $A, B \in M_N(\mathbb{K})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(ii) e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Prop. 41 : Sous la condition initiale $y(t_0) = y_0$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{K}^N$, $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$.

Ex. 42 : $\begin{cases} x' = x + 2y, & x(1) = 2 \\ y' = 2x + y, & y(1) = 1 \end{cases}$: $Y' = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}Y$.

$x(t) = \frac{1}{2}(3e^{3(t-1)} + e^{-(t-1)})$; $y(t) = \frac{1}{2}(3e^{3(t-1)} - e^{-(t-1)})$

Ex. 43 : Le système de l'ex. 38 a pour solutions $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} \\ y(t) = \beta e^{2t} \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Prop. 44 : Soit A diagonalisable. Soient V_k les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_k. Alors une base de S_H est donnée par $t \mapsto e^{\lambda_k t}V_k$, $k \in [\![1, N]\!]$.

Ex. 45 : $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$ a pour solutions : $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t \\ y(t) = -\alpha 4 e^{-2t} - \beta e^t \end{cases}$ (voir annexe) B

[GOU]

App. 46 : (Équation de Sylvester) Soient $A, B \in M_N(\mathbb{R})$, avec $Sp(A) \cup Sp(B) = \{\lambda \,/\, Re(\lambda) < 0\}$. Alors, pour tout $C \in M_N(\mathbb{R})$, il existe un unique $X \in M_N(\mathbb{R})$ solution de l'équation $AX + XB = C$.

DEV

3. Méthode de variation de la constante [BER]

Th. 47 : De la solution y_H de (E_H), on trouve la solution y de (E).

Méthode : Si $y_H(t) = R(t,t_0)C$, on écrit $y_H(t) = R(t,t_0)C(t)$. En dérivant et en évaluant dans (E), on obtient $C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)ds$, sous la condition initiale t_0. On obtient, pour le cas $A \in M_N(\mathbb{K})$:

Prop. 48 : (Formule de Duhamel.)

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds$$

Ex. 49 : $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$: $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t(e+1) + e + \frac{1}{2}\right)e^t$.

IV] Étude de l'équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

1. Forme des solutions dans le cas des coefficients constants [BER]

Ici, $p, q \in \mathbb{R}$; on pose $(E_{2,H})$: $y'' + py' + qy = 0$.

Déf. 50 : L'équation caractéristique associée à $(E_{2,H})$ est $P(x) = 0$, où $P(X) = X^2 + pX + q$ est le polynôme caractéristique associé à $(E_{2,H})$.

Prop. 51 : Soit $\mathcal{E}_2$ l'équation caractéristique de $(E_{2,H})$.

(i) Si $\mathcal{E}_2$ a deux solutions réelles, x_1, x_2, distinctes, les solutions de $(E_{2,H})$ sont $y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\mathcal{E}_2$ a une racine réelle double x_1, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{x_1 t}$.

(iii) Si $\mathcal{E}_2$ a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\theta$, $y(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos \theta t + \mu \sin \theta t)$

Ex. 52 : $y'' - 3y' - 4y = 0$. $\Rightarrow y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{4t}$.

App. 53 : Oscillateur harmonique. $y'' + \omega^2 y = 0$. On résout $X^2 + \omega^2 = 0$, ie $(X + i\omega)(X - i\omega) = 0$. Donc $y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$.

App. 54 : Équation différentielle d'Euler d'ordre 2. $at^2y'' + bty' + cy = 0$. Par le changement de variable $t = e^u$, on se ramène à une équation à coefficients constants : $az''(u) + (b-a)z'(u) + cz(u) = 0$, où $z(u) = y(e^u)$.

2. Localisation des zéros [BER]

Déf. 55 : Pour $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ est un zéro simple de f si $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$.

Th. 56 : (i) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $t_0 \in I$ un zéro simple de f. Alors t_0 est un zéro isolé de f.

(ii) Soit (E_2) : $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ où $p, q \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors les zéros d'une solution $y \neq 0$ de (E_2) sont simples donc isolés.

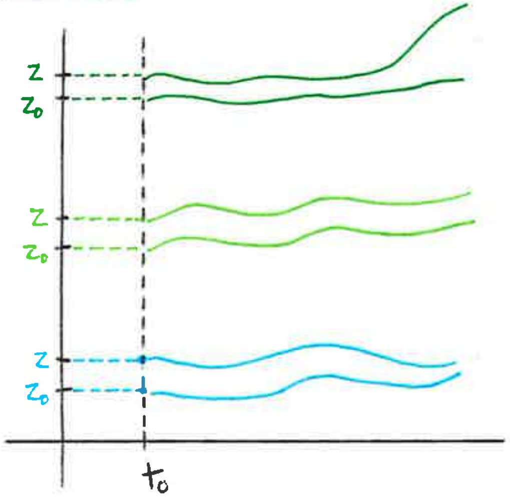
Rem. 57 : Cette solution n'a alors qu'un nombre fini de zéros sur I.

Th. 58 : (Théorème de séparation de Sturm.) Soient y et z deux solutions indépendantes de (E_2). Soient $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$, deux zéros consécutifs de y. Alors il existe un unique zéro de z dans $]t_1, t_2[$.

DEV

Annexe

(A) Stabilité. [DEM]



solution instable

solution stable

solution asymptotiquement stable

(B) Résolution de l'ex. 45.

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \iff Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} Y.$$

On diagonalise A (si possible) : $X^2 + X - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$\exp(tA) = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{t} \\ -4e^{-2t} & -e^{t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

et via la prop 44 on a pour base de solutions :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^{t} \\ y(t) = -\alpha 4 e^{-2t} - \beta e^{t} \end{cases}$$

Références :

- [BER] F. Berthelin, équations différentielles
- [GOU] X. Gourdon, analyse
- [DEM] J.P. Demailly, analyse numérique et équations différentielles
- [QUE] H. Queffélec et C. Zuily, analyse pour l'agrégation
- [ROU] F. Rouvière, petit guide de calcul différentiel