221

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

I. CADRE THÉORIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. Existence et unicité de solutions

Déf 1 : Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Une équation différentielle linéaire d'ordre p est une équation du type $(L) : Y^{(p)} = A_{p-1}(t)\,Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)\,Y + B(t)$ où $\forall i\in[\![0;p-1]\!]$, $A_i\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$.
Si $B\equiv 0$, l'équation différentielle est dite homogène.

Rq 2 : Toute EDL d'ordre p peut se ramener à une EDL d'ordre 1 :

$$(L) \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y\\ Y'\\ \vdots \\ Y^{(p-1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & (0)\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & & A_{p-1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y\\ Y'\\ \vdots \\ Y^{(p-1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ B(t)\end{pmatrix}$$

Rq 3 : Si Y est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ avec $n\geq 2$, on parle aussi de systèmes différentiels linéaires.

Ex 4 : $(L) : \begin{cases} x''+x'+4y'-x-3y=0 \\ y''-3y'+x+3y=0\end{cases} \iff X'' + \underbrace{\begin{pmatrix}1&4\\0&-3\end{pmatrix}}_{A}X' + \underbrace{\begin{pmatrix}-1&-3\\1&3\end{pmatrix}}_{B}X=0$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(L) est une EDL d'ordre 2 et se ramène à $\begin{pmatrix}X\\X'\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & I_2\\ -B & -A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\X'\end{pmatrix}$ (par blocs)

Prop 5 : Le problème $\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t)+B(t) \\ Y(t_0) = X_0\end{cases}$ où $X_0\in\mathbb{K}^n$, $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$, $t_0\in I$
équivaut à $Y\in\mathcal{C}^0(\mathbb{K}^n)$ et $Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y(s)+B(s))\,ds$.

Thm 6 : (Cauchy-Lipschitz linéaire) : Soit une EDL (L) : $Y' = A(t)Y+B(t)$ où $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$. Alors pour tout $t_0\in I$ et pour tout $X_0\in\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution V de (L) définie sur I tout entier telle que $V(t_0)=X_0$. **DEV 1**

C-ex 7 : Le problème $\begin{cases} y'=3|y|^{2/3} \\ y(0)=0\end{cases}$ admet les deux solutions $y\equiv 0$ et $y(t)=t^3$ sur $\mathbb{R}$.

2. Structure de l'espace des solutions

Thm 8 : Soit $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. L'ensemble S_H des solutions de l'EDL homogène $Y'=A(t)Y$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Rq 9 : Avec la remarque 2, l'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre p est un $\mathbb{K}$-ev de dimension np.

Cor 10 : L'ensemble des solutions de l'EDL (L) : $Y'=A(t)Y+B(t)$ est l'espace affine V_0+S_H où V_0 est une solution particulière de (L) et S_H est l'ensemble des solutions de $Y'=A(t)Y$.

C-ex 11 : $t^2y''-6ty'+12y=0$ (L).
$u_1(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$, $u_2(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\leq 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$, $u_3(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, $u_4(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^3 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$
sont 4 solutions indépendantes de (L) qui est d'ordre 2.

Déf 12 : Soit $V_1,\dots,V_n$ n solutions de (H) : $Y'=A(t)Y$, $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
On appelle wronskien de $V_1,\dots,V_n$ l'application $W : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t\mapsto \det(V_1(t),\dots,V_n(t))\end{array}$

Ex 13 : Le wronskien de 2 solutions u et v de l'EDL homogène d'ordre 2 : $y''=p(t)y'+q(t)y$ est $\begin{vmatrix} u & v\\ u' & v'\end{vmatrix} = uv'-u'v$.

Prop 14 : Soient $V_1,\dots,V_n$ des solutions de (H). Alors le rang des vecteurs $V_1(t),\dots,V_n(t)$ est indépendant de $t\in I$.

Cor 15 : Des solutions $V_1,\dots,V_n$ de (H) forment une base des solutions de (H) si et seulement si il existe $t_0\in I$ tel que $W(V_1,\dots,V_n)(t_0)\neq 0$, si et seulement si $\forall t\in I$, $W(V_1,\dots,V_n)(t)\neq 0$.

Prop 16 : Soient $V_1,\dots,V_n$ des solutions de (H) et $a\in I$. Alors :
$\forall t\in I$, $W(t) = W(a)\exp\left(\int_a^t \mathrm{tr}(A(u))\,du\right)$.

II. RÉSOLUTION EXPLICITE

1. Exponentielle de matrice

Déf 17 : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n$.

Prop 18 : $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\sum\frac{1}{n!}A^n$ converge absolument et $|||e^A|||\leq e^{|||A|||}$.

Prop 19 : Si A et B commutent, alors $e^{A+B}=e^Ae^B$.

Méthode 20 : (Calcul de e^A) : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :
$A=PTP^{-1}$ où $T=\begin{pmatrix}T_1 & (0)\\ (0) & T_k\end{pmatrix}$ et $T_i = \begin{pmatrix}\lambda_i & (*)\\ (0) & \lambda_i\end{pmatrix} = \lambda_i I + N_i$ où N_i nilpotente

Ainsi, $e^A = Pe^TP^{-1}$ où $e^T = \begin{pmatrix}e^{T_1} & (0)\\ (0) & e^{T_k}\end{pmatrix}$ et $e^{T_i} = e^{\lambda_i}e^{N_i}$

Prop 21 : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A)=\exp(\mathrm{tr}(A))$.

2. Cas des coefficients constants

Thm 22 : La solution Y de $\begin{cases} Y'=AY\\ Y(t_0)=V_0\end{cases}$ est donnée par : $Y(t)=e^{(t-t_0)A}V_0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Cor 23 : Les composantes de Y sont des fonctions exponentielles-polynôme de la forme $\sum_{j=1}^{r}P_j(t)\exp(\lambda_j t)$ où $\lambda_1\dots\lambda_r$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.

Cor 24: (Cas particulier des EDL homogènes d'ordre p sur $\mathbb{K}$ à coeff. constants):
Soit (E) : $y^{(p)}+a_{p-1}y^{(p-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$ où $a_j\in\mathbb{K}$.
Soit $P(X)=X^p+\dots+a_1X+a_0$ le polynôme caractéristique de (E).
i) Si P a pour racines $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ de multiplicité $m_1,\dots,m_s$ alors les solutions de (E) sont des combinaisons linéaires des fonctions $t\mapsto t^q e^{\lambda_j t}$, $1\le j\le s$, $0\le q\le m_j-1$
ii) si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, les solutions réelles s'obtiennent en prenant la partie réelle et la partie imaginaire des solutions complexes.

Ex 25: Les solutions de $y''+ay'+by=0$ $a,b\in\mathbb{K}$ avec $P(X)=X^2+aX+b$ sont de la forme:
- $t\mapsto \lambda_1 e^{r_1 t}+\lambda_2 e^{r_2 t}$ si P a deux racines distinctes r_1 et r_2
- $t\mapsto (\lambda t+\mu)e^{rt}$ si P a une racine double r.
- $t\mapsto e^{\beta t}(\lambda_1\cos(\alpha t)+\lambda_2\sin(\alpha t))$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et les racines de P sont $\beta\pm i\alpha$

Ex 26: Les solutions de:
$$\begin{cases}x'=x+z\\ y'=-y-z\\ z'=2y+z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
sont de la forme $t\mapsto \alpha e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta e^{it}\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\-2\end{pmatrix}+\gamma e^{-it}\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\-2\end{pmatrix}$

Déf 27: On dit qu'un système de la forme $x'=Ax+Bu$ où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $u\in\mathcal{C}^0([0;T],\mathbb{R}^m)$ est contrôlable en temps T si $\forall x_0,x_f\in\mathbb{R}^n$, il existe $u\in\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^m)$ telle que la solution au problème de Cauchy: $\begin{cases}x'=Ax+Bu\\x(0)=x_0\end{cases}$ vérifie $x(T)=x_f$.

Thm 28: (Kalman) : Le système $x'=Ax+Bu$ est contrôlable en temps T quelconque si et seulement si la matrice $K=(B|AB|\dots|A^{n-1}B)\in\mathcal{M}_{n,mn}(\mathbb{R})$ est de rang n. DEV2

Ex 29: $\begin{cases}x'=x+u\\y'=x+y\end{cases}$ est contrôlable mais $\begin{cases}x'=x+u\\y'=y\end{cases}$ ne l'est pas.

3. Cas général : coefficients variables

Déf 30: Soit l'EDL homogène (E_0) : $Y'=A(t)Y$, $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. On appelle résolvante de (E_0) la solution du problème $\begin{cases}M'(t)=A(t)M(t)\\M(t_0)=I_n\end{cases}$ où $M(t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0\in I$. On la note $R(t,t_0)$.

Prop 31: $\forall t\in I$, $R(t,t)=I_n$
$\forall t_0,t_1,t_2\in I$ $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0)=R(t_2,t_0)$

Prop 32: La solution du problème de Cauchy $\begin{cases}Y'=A(t)Y\\Y(t_0)=V_0\end{cases}$ est donnée par:
$$Y(t)=R(t,t_0).V_0.$$

Prop 33: $\det(R(t,t_0))=\exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(u))\,du\right)$.

Rq 34: La résolvante du système $X'=AX$ où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients constants est $R(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$.

Ex 35: (E_0) : $X'=AX$ où $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ a pour résolvante $R(t,t_0)=\begin{pmatrix}\cos(t-t_0)&\sin(t-t_0)\\-\sin(t-t_0)&\cos(t-t_0)\end{pmatrix}$

4. Recherche de solutions particulières

Thm 36: Une solution particulière de $\begin{cases}Y'(t)=A(t)Y(t)+B(t)\\Y(t_0)=V_0\end{cases}$ est :
$$Y(t)=R(t,t_0)V_0+\int_{t_0}^t R(t,u)B(u)\,du.$$

Cor 37: Dans le cas où A est à coefficients constants, une solution particulière est $Y(t)=e^{A(t-t_0)}V_0+\int_{t_0}^t e^{A(t-u)}B(u)\,du$.

Méthode 38: (Variation des constantes) : Soit (L) : $Y'=A(t)Y+B(t)$, où $B\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$, $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Soit $V_1,\dots,V_n$ n solutions indépendantes du système homogène associé : (H) : $Y'=A(t)Y$. Alors on recherche une solution particulière de (L) sous la forme $V: t\mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)V_i(t)$ où $\lambda_i\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. On trouve ensuite les $\lambda_i'(t)$ puis
et V solution de (L) ssi $\sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)V_i(t)=B(t)$.
les $\lambda_i(t)$ par intégration.

Ex 39: Les solutions de $y''+y=\tan^2 t$, $t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont:
$$t\mapsto \alpha\cos t+\beta\sin t-2\sin(t)\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right]$$

Ex 40: Les solutions de $t^2y''-2y=3t^2$ sur $]0;+\infty[$ sont:
$$t\mapsto \alpha t^2+\frac{\beta}{t}+t^2\ln(t)-\frac{t^2}{3}$$

Ex 41: (Avec un changement de fonction) : (E) : $x^2y''+y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
En posant $z(u)=y(e^u)$, on trouve que les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto \sqrt{x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x)\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x)\right)\right)$.

Ex 42: (Avec des séries entières) : (E_2) : $(1-x^2)y''-6xy'-4y=0$ sur $]-1;1[$ a pour solution générale $x\mapsto \dfrac{A+Bx(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$, $A,B\in\mathbb{R}$.
(E_3) : $xy''(x)+2y'(x)+4xy=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admet pour solution développable en séries entières $x\mapsto a_0\dfrac{\sin(2x)}{2x}$, $a_0\in\mathbb{R}$.

III. ÉTUDE QUALITATIVE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1. Notion de stabilité des équilibres

Soit (A) : $\dot{x}(t) = f(x(t))$ un système différentiel :

Déf 43 : Un point d'équilibre (ou point critique) du système (A) est un point x_0 tel que $f(x_0)=0$.

Déf 44 : On dit qu'un point d'équilibre x_0 est :

- stable : si $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, x solution de (A) telle que $|x(t_0)-x_0|<\delta$ alors x est définie $\forall t \geq t_0$ et $|x(t)-x_0| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.
- instable : s'il n'est pas stable
- asymptotiquement stable : si $\exists \delta>0$ tel que si x solution de (A) telle que $|x(t_0)-x_0|<\delta$ alors x est définie $\forall t \geq 0$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Thm 45 : (Thm de stabilité - Cas linéaire) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{C}$. Alors le point d'équilibre 0 du système $Y' = AY$ est :

- asymptotiquement stable ssi $Re(\lambda_j)<0 \quad \forall j \in [\![1;m]\!]$.
- stable ssi $\forall j \in [\![1;m]\!]$ $Re(\lambda_j)<0$ ou bien $Re(\lambda_j)=0$ et le bloc correspond à λ_j est diagonalisable.

Thm 46 : (Liapounov) : Soit le système $y'=f(y)$, $y(0)=x$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(0)=0$. Si le système linéaire $y' = Df(0)y$ admet 0 comme point d'équilibre asymptotiquement stable alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $y'=f(y)$.

C-ex 47 : Soit le système $\begin{cases} x' = \alpha x^3 \\ y' = \beta y^3 \end{cases}$, $t \geq 0$. Ici $Df(0)=0$ et 0 est un point d'équilibre $\left|\begin{array}{l} \text{asymptotiquement stable si } \alpha<0 \text{ et } \beta<0 \\ \text{instable si } \alpha>0 \text{ ou } \beta>0. \end{array}\right.$

2. Cas particulier des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$.

Prop 48 : On considère le système $Y' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) si A admet 2 valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Soient $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ des vecteurs propres associés.

→ si $0<|\lambda_1|<|\lambda_2|$, les trajectoires sont tangentes à $\vec{V_1}$ et ont pour direction parabolique $\vec{V_2}$. (figure 1). On parle de noeud impropre stable ou instable

→ si $\lambda_1<0<\lambda_2$: (figure 2), on parle de col (instable).

ii) si A admet une valeur propre double λ :

→ Si A est diagonalisable (donc diagonale) alors on a un noeud propre stable (si $\lambda<0$) et instable (si $\lambda>0$) (figure 3)

→ Si A est non-diagonalisable alors on a un noeud exceptionnel stable (si $\lambda<0$) et instable (si $\lambda>0$). (figure 4)

iii) si A n'a pas de valeurs propres réelles : $Sp(A) = \{\alpha+i\beta ; \alpha-i\beta\}$.

si $\alpha>0$ on a un foyer instable $\}$ spirales autour de l'origine
si $\alpha>0$ on a un foyer stable
si $\alpha=0$ on a un centre (courbes fermées, solutions périodiques) $\}$ figure 5.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AU SENS DES DISTRIBUTIONS

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions.

Déf 49 : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, T est dérivable et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$

Déf 50 : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors $gT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$

Prop 51 : Les solutions de $T'=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont les constantes.

App. 52 : Les solutions de $xT'+T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont de la forme $T = a\delta_0 + c\,vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Déf 53 : Soit $S, T \in \mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+\}$. On définit le produit de convolution de S et T par : $\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

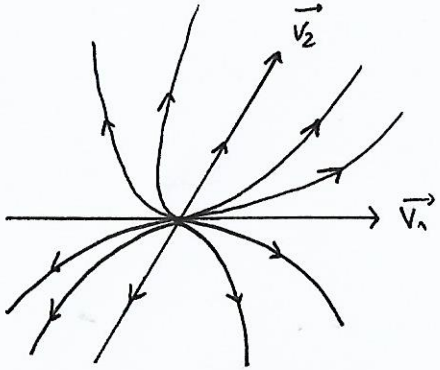
Prop 54 : $\forall T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on a $\delta * T = T * \delta = T$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $T * \delta^{(k)} = T^{(k)}$.

Prop 55 : $(\delta' - c\delta)^{*-1} = H(t)\, e^{ct}$

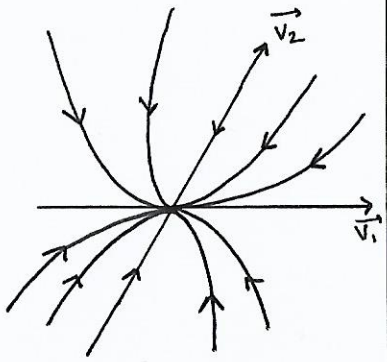
Prop 56 : L'équation différentielle linéaire (E) : $T^{(m)} + a_{m-1}T^{(m-1)} + \dots + a_1 T' + a_0 T = S$ où $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ se réécrit $E * T = S$ où $E = \delta^{(m)} + a_{m-1}\delta^{(m-1)} + a_1\delta' + a_0\delta$ et $t \mapsto H(t)e^{r_1 t} * H(t)e^{r_2 t} * \dots * H(t)e^{r_m t} * S$ est une solution de (E), où $r_1, \dots, r_m$ sont les racines du polynôme $X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

FIGURES : PORTRAITS DE PHASE EN DIMENSION 2.

figure 1 :

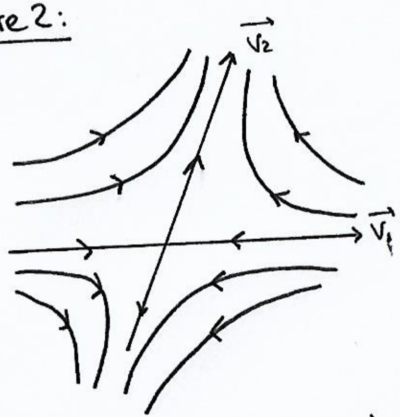


$0 < \lambda_1 < \lambda_2$: noeud impropre instable



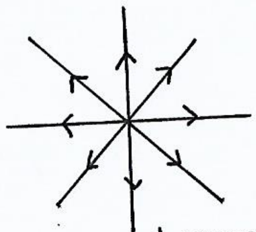
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: noeud impropre stable

figure 2 :

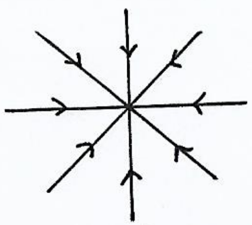


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: col (instable)

figure 3 : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

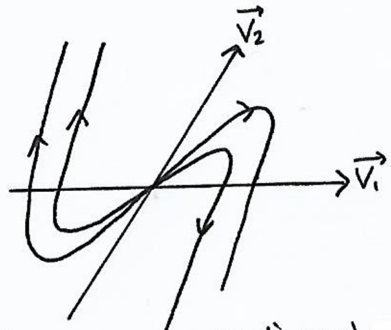


$\lambda > 0$: noeud propre instable

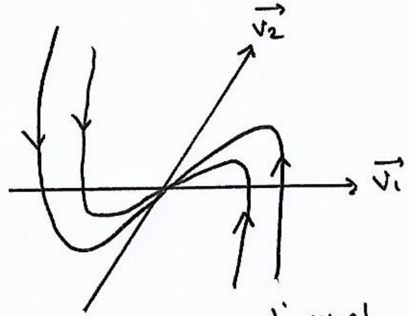


$\lambda < 0$: noeud propre stable

figure 4 :

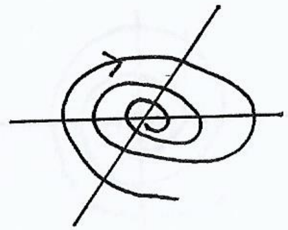


$\lambda > 0$: noeud exceptionnel instable

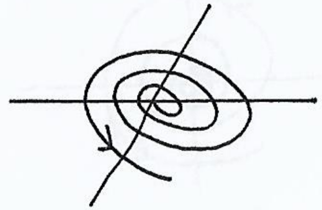


$\lambda < 0$: noeud exceptionnel stable

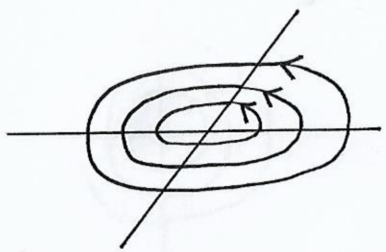
figure 5 :



$\alpha < 0$: foyer stable



$\alpha > 0$: foyer instable



$\alpha = 0$: centre (solutions périodiques)