221 Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

I - Équations différentielles linéaires

A. Notion d'équation différentielle linéaire :

Définition 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Une équation différentielle linéaire d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ est une équation de la forme $y^{(p)} = A_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)y + B(t)$
où $A_{p-1}, \dots, A_0$ sont des fonctions continues de I dans $M_n(\mathbb{K})$ et B une fonction continue de I dans $\mathbb{K}^n$.
Si $B \equiv 0$ sur I, l'équation est dite homogène.

Définition 2 : Un problème de Cauchy d'ordre p est la donnée d'une équation différentielle d'ordre p et de p conditions initiales : $y(t_0) = x_0, y'(t_0) = x_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = x_{p-1}$

Proposition 3 : Toute équation différentielle linéaire d'ordre p peut se réécrire en une équation linéaire d'ordre 1 sous forme matricielle : $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$

Exemple 4 : $y'' + 2y' + y = te^t$ devient $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}$
avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

B. Notion de solution

Définition : Une solution d'une équation différentielle est la donnée d'un couple (y, J), J intervalle de $\mathbb{K}$, y fonction de J vers $\mathbb{K}^n$ vérifiant l'équation.

- Une solution (y_1, I_1) est un prolongement d'une solution (y_2, I_2) si $I_2 \subset I_1$ et $y_1 \equiv y_2$ sur I_2
- Une solution est dite maximale si elle n'admet plus de prolongement
- Une solution est dite globale si elle est définie sur l'intervalle I sur lequel l'équation est définie.

Remarque 6 : Une solution globale est maximale

C. Existence et unicité des solutions.

Théorème 7 : Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1.
Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^n$ définie sur I. Pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$, (E) possède une unique solution y vérifiant $y(t_0) = x_0$ définie sur tout I

Contre-Exemple 8 : Le problème de Cauchy non-linéaire $\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ possède 0 et $t \longmapsto t^3$ comme solutions globales.

Remarque 9 : Les graphes des solutions d'une équation différentielle linéaire partitionne l'espace $I \times \mathbb{K}^n$

D. Forme des ensembles de solution

Proposition 10 : Principe de superposition : Si Y_1 et Y_2 sont respectivement solutions de $Y' = A(t)Y + B_1(t)$ et $Y' = A(t)Y + B_2(t)$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda Y_1 + \mu Y_2$ est solution de $Y' = A(t)Y + \lambda B_1(t) + \mu B_2(t)$

Théorème 11 : L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $\frac{dY}{dt} = A(t)Y$, $A \in \mathcal{C}^0(I, M_n(\mathbb{K}))$ est un s.e.v. de dimension n du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$
On a de plus un isomorphisme $\begin{array}{l} S_H \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ Y \longmapsto Y(t_0) \end{array}$ à t_0 fixé $t_0 \in I$.

Remarque 12 : • Les solutions d'une EDL homogène sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p forment un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension np.
• L'ensemble des solutions de $\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t)$ est un espace affine de dimension n ; $\{V + V_0 \mid V \in S_H\}$ où V_0 est une solution particulière de l'équation.

Définition 13 : Une base de S_H est appelée système fondamental de solution.

II - Résolution explicite

A. Equations à coefficients constants.

Cadre : On s'intéresse ici au cas où les A_i ne dépendent pas de t.

Théorème 14 : Sur $\mathbb{R}$, $\begin{cases} y' = a \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ a pour solution
$y : t \mapsto y_0 \cdot e^{(t_0 - t)a}$

Définition 15 : On définit l'exponentielle sur $M_n(\mathbb{C})$ par
$$M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$$

Théorème 16 : $\begin{cases} \frac{d}{dt} Y = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ a pour solution $t \mapsto e^{(t-t_0)A} Y_0$

Exemple 17 : $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -y - 3 \\ z' = 2y + 3 \end{cases}$ se réécrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Et a pour solution générale sur $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix}$
$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Définition 18 : Le polynôme caractéristique de l'équation $y^{(p)} = a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ est $X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0$

Théorème 19 : Soit l'équation $y^{(p)} = a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ de son polynôme caractéristique de multiplicité respective $n_1, \dots, n_m$.
Toute solution de l'équation est alors partie réelle de
$\sum_{k=1}^{m} P_k(t) e^{\lambda_k t}$ pour P_k des polynômes de degré $< m_k$ $\forall k$.

Exemple 20 : $y'' + 2y' - y = 0$ a pour solution les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{-t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Théorème 21 : Méthode de variation de la constante. On considère $(y_1, \dots, y_p)$ système fondamental de solution d'une EDL d'ordre p. Alors on obtient une solution particulière en considérant une solution sous la forme $y(t) = \sum_{i=1}^{p} c_i(t) y_i(t)$ où les c_i vérifient
$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_p(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(p-1)}(t) & y_2^{(p-1)}(t) & \cdots & y_p^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Exemple 22 : Les solutions de $y'' + y = \tan^2(t)$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t - 2t \sin t \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B. Equations à coefficients non-constants.

Proposition 23 : EDL d'ordre 1 sur $\mathbb{K}$: $y' = a(t) y + b(t)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a. $\lambda \in \mathbb{K}$.
Une solution particulière est $y_0(t) = e^{A(t)} \lambda(t)$ avec λ primitive de $t \mapsto b(t) e^{-A(t)}$

Exemple 24 : $(1 + t^2) y' = ty + (1 + t^2)$ a pour solution $\lambda \sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+t^2} \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 25 : Il n'existe pas de méthode générale de résolution pour les autres équations.

Remarque 26 : La méthode de variation de la constante fonctionne aussi dans le cas non-constant pour trouver une solution particulière.

Définition 27 : Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ n solutions d'une équation différentielle linéaire dans $\mathbb{K}^n$. On nomme Wronskien l'application notée W

$$I \to \mathbb{K}$$
$$t \mapsto \det(Y_1(t) | \cdots | Y_n(t))$$

Remarque 28 : Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de solution d'une EDL homogène d'ordre p. Alors, $W(f_1, \dots, f_p) = \tilde{0}$ si $(f_1, \dots, f_p)$ est un système fondamental de solution.

Théorème 29 Soit y_1, y_2 deux solutions d'une EDLH d'ordre 2. On a la solution $W(t) = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)$.
La connaissance d'une solution homogène permet de trouver une base de solution par la résolution d'une EDL homogène d'ordre 1.

Exemple 30 : $t^2 y'' - t y' + y = 0$. a pour solution évidente $t \mapsto t$. Une seconde solution vérifie $W(t) = t y_2'(t) - y_2(t)$

Théorème 30 : Le wronskien W de deux solutions de $a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = 0$ vérifie $W'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)} W(t)$ lorsque $a(t)$ est non nul.

III - Étude qualitative.

A. Étude de stabilité.

Définition 31 : Soit $(E) : y' = f(t, y)$ une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ $t_0 \in \mathbb{R}$ On note f_{y_0} la solution maximale de (E) vérifiant $f_{y_0}(t_0) = y_0$. f_{y_0} est une solution stable si il existe une boule $\overline{B(y_0, r)}$ et $C \geq 0$ tels que

1. $\forall y \in \overline{B(y_0, r)}$, $t \mapsto f_y(t)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$
2. $\forall y \in \overline{B(y_0, r)}$, $\forall t \geq t_0$, on a $|f_y(t) - f_{y_0}(t)| \leq C |y - y_0|$

Définition 32 : La solution f_{y_0} est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si il existe une boule $\overline{B(y_0, r)}$ et une fonction $\delta : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue de limite nulle en $+\infty$ telle que $\forall y \in \overline{B(y_0, r)}$ et $t \geq t_0$, $|f_y(t) - f_{y_0}(t)| \leq \delta(t) |y - y_0|$

Théorème 33 : Théorème de Liapounov : Soit le système différentiel DEV.2

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$.

Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : $\forall x$ au voisinage de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to +\infty$

Remarque 34 : Dans le cas linéaire, le système est déjà linéarisé

B. Etude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

On étudie $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $A \in GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

L'allure des trajectoires du système va dépendre de la nature des valeurs propres de A notée λ_1, λ_2.

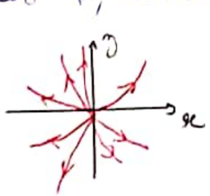
- Valeur propre réelles
  - ↳ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$
  - ↳ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, Si A est diagonalisable $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$

    Si A n'est pas diagonalisable $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t} \end{cases}$
- Valeur propre complexe : $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$, $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

On pose $z = x + iy$. et alors $z = re^{i\theta}$, $\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}$

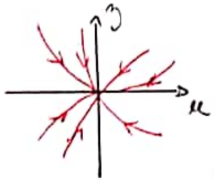
Portraits de phase :

○ Cas λ_1, λ_2 réels, $\lambda_1 \neq \lambda_2$



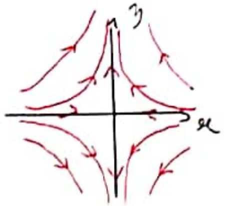
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

noeud impropre instable



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

noeud impropre stable

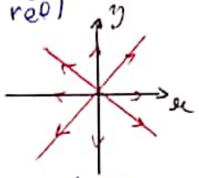


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

col

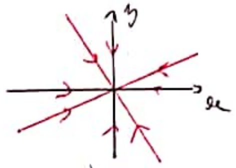
○ Cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ réel

· A Diagonalisable



$\lambda > 0$

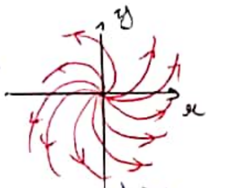
noeud propre instable



$\lambda < 0$

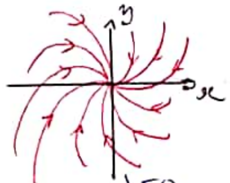
noeud propre stable

A non Diagonalisable



$\lambda > 0$

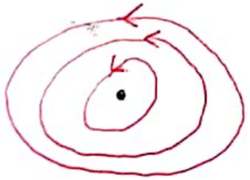
noeud exceptionnel instable



$\lambda < 0$

noeud exceptionnel stable

○ Cas λ_1, λ_2 complexe



$\alpha = 0$

centre

$\alpha > 0$

foyer instable

$\alpha < 0$

foyer stable

Sources :
- Gourdon, Analyse
- Pommelet, Cours d'Analyse
- Rouvière
- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.