Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

222

I) Résolutions classiques et solutions fortes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I.A) Quelques exemples pour l'introduction.

[OA 4]

Ex 1: Soient $f, g \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq 0$. Le problème
$$\begin{cases} y'' + fy = g & \text{sur } [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$
admet une unique solution.

[Evans]

Ex 2: (Equation de transport) Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}^n$.
On étudie le problème :
$$(T) \begin{cases} \partial_t u + b \cdot \nabla u = f & \text{sur } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
où $b \cdot \nabla u$ est le produit scalaire entre b et ∇u.

Prop. 3: Si $f \equiv 0$, alors pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, u est constante sur $\Delta_{(x,t)} = (x,t) + \mathrm{Vect}((b,1))$, si elle existe.

Coro 4: Si $f \equiv 0$ et g est C^1 alors :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad u(x,t) = g(x - tb).$$

Rem 5: Si $f \equiv 0$ et g n'est pas C^1, alors (T) n'admet pas de fonction solution.

Prop. 6: Si f et g sont C^1, (T) admet pour solution
$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s)\, ds. \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+.$$

I.B) Résolution par transformation de Fourier.

[Evans]

Def 7: Soit $u(x,t)$ définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+$ telle que :
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto u(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
On appelle transformée de Fourier de u la fonction :
$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(y,t)\, dy \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$
On appelle transformée de Fourier inverse la fonction
$$\check{u}(x,t) = \hat{u}(-x,t).$$

[Evans]

Thm 8: (Propriétés de la transformée de Fourier)
Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors la transformée de Fourier existe comme prolongement de celle sur $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ et :
i) $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}}\, dx$.
ii) $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
iii) Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{u * v} = \hat{u}\hat{v}$
iv) Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $u = \check{(\hat{u})}$

App. 9: On étudie l'équation de la chaleur :
$$(H) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = g(x) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$
où $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.
Alors (H) admet une unique solution
$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

[OA 4]

Rem 10: Les séries de Fourier nous permettent les mêmes méthodes sur les fonctions périodiques :
Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, continue, C^1 par morceaux, 2π-périodique.
Le problème
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
admet une unique solution 2π-périodique par rapport à x, continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

[Evans]

App. 11: (potentiels de Bessel)
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. L'équation $u - \Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$ admet une unique solution $u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (f * B)$ où
$$B(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^{+\infty} t^{-n/2} \exp\left(-t - \frac{|x|^2}{4t}\right) dt.$$

II) Distributions, Sobolev et solutions faibles.

II.A) Distributions et Sobolev : des espaces agréables

[Zui]

Def 12: On appelle classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \ |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Bon]

Déf 13: L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées est l'ensemble des applications linéaires $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\exists k, \ell \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq \ell}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \quad \forall \varphi$$

Déf 14: (Dérivation au sens des distributions).

Soient $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ and $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

$$v = \partial^\alpha u \iff \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, \varphi\rangle.$$

[Evans]

Ex 15: $n = 1$, $u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $v(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Alors $u' = v$ au sens des distributions.

[Bon]

Prop. 16: $\forall p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Déf 17: L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha u$ existe au sens des distributions et $\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Notation 18: Si $p = 2$, $\quad W^{k,2}(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$

Déf 19: Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, l'application

$$\|\cdot\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} : u \longmapsto \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & p < +\infty. \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \inf \{\mu \in \mathbb{R}, |\{\partial^\alpha u > \mu\}| = 0\} & p = +\infty. \end{cases}$$

est une norme sur $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Rem 20: Toutes les définitions et propositions précédentes peuvent être faites sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

[Evans]

Thm 21: Soient $u, v \in W^{k,p}(U)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors.

i) $\partial^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ et si $|\alpha| + |\beta| \leq k$, $\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u$.

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ et $\partial^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial^\alpha u + \mu \partial^\alpha v$.

iii) Si $V \subset U$ est un ouvert, $u \in W^{k,p}(V)$.

iv) Si $\varphi \in C_c^\infty(U)$ alors $\varphi u \in W^{k,p}(U)$ et $\partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \, \partial^{\alpha-\beta} u$.

Prop. 22: $(W^{k,p}(U), \|\cdot\|_{W^{k,p}(U)})$ est un espace de Banach.

Déf 23: On note $W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty(U)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}}$.

(resp. $H_0^k(U) = \overline{C_c^\infty(U)}^{\|\cdot\|_{H^k(U)}}$)

Ex 24: (Schrödinger) On étudie le problème (S) $\begin{cases} \partial_t u + \frac{i}{2}\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = g(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$

Si $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $H^k(\mathbb{R}^n)$) alors il existe une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, $C^0(\mathbb{R}, H^k(\mathbb{R}^n))$)

De plus si $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$: $\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \partial_t^p u \in C^0(\mathbb{R}, H^{k-2p}(\mathbb{R}^n)) \\ \|u(\cdot, t)\|_{H^k} = \|g\|_{H^k} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \|\partial_t^p u(\cdot, t)\|_{H^{k-2p}} \leq C_p \|g\|_{H^k} \quad \forall t, k \end{cases}$

[Bon]

Thm. 25: La transformation de Fourier est bien définie, linéaire continue et bijective de $\mathcal{S}(U)$ sur $\mathcal{S}(U)$.

Thm-déf 26: Soit $T \in \mathcal{S}'(U)$. On note $\hat{T}$ la distribution telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(U), \quad \langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle.$$

Déf 27: Soit $s \in \mathbb{R}$, $H^s(U) = \{T \in \mathcal{S}'(U), \ \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T} \in L^2(U)\}$ est muni de la norme $\|T\|_s^2 = \int_U (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{T}(\xi)|^2 d\xi$.

Prop. 28: Si $s = k \in \mathbb{N}$, les deux définitions coïncident.

[Col]

Thm 29: Pour toute distribution à support compacte g, il existe une unique solution u à (S) au sens des distributions, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

De plus si $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, alors $u \in C^0(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^n))$ et

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

DEV 1.

II.B) Solutions faibles et équations elliptiques.

[Evans]

Déf 30: Une équation elliptique sur $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert est de la forme : $(*) \begin{cases} Lu = f & \text{sur } U. \\ u = 0 & \text{sur } \partial U \end{cases}$ où

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{ij}(x) \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \partial_i u + c(x) u.$$

Rem 31: On suppose que $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$

Déf 32:

i) On note $B[\cdot, \cdot]$ la forme bilinéaire associée à L définie par

$$\forall u, v \in H_0^1(U), \quad B[u, v] = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \, \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u \, v + c u v\right) dx$$

ii) $u \in H_0^1(U)$ est une solution faible de $(*)$ si pour tout $v \in H_0^1(U)$,

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(U)$.

[Brezis]

DEV 2

Thm 33 : (Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert, $a : H\times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u_\varphi \in H$ t.q $\varphi = a(u_\varphi, \cdot)$

De plus, si a est symmétrique, u_φ est l'unique minimisant de $J : x \mapsto \frac{1}{2} a(x,x) - \varphi(x)$.

App. 34 : (Solutions variationnelles) On considère le problème de Dirichlet
$$(D)\ \begin{cases} -u'' + u' = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

→ Si $f \in L^2(]0,1[)$, (D) admet une unique solution faible u.

→ si $f \in C^0(I)$, $u \in C^2(I)$ est solution forte.

III) Etude du Laplacien Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Def 35 : On appelle équation de Laplace l'équation $(L)\ \Delta u = 0$ où le laplacien $\Delta : u \mapsto \partial_1^2 u + \dots + \partial_n^2 u$ est l'opérateur différentiel de polynôme scindé $P = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Def 36 : On appelle fonction harmonique toute solution $u \in C^2(\Omega)$ de (L). On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques, c'est un espace vectoriel.

Ex 37 : En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, toute fonction holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est harmonique.

Prop 38 : Si $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $\Delta(uv) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$

[Evans]

Def 39 : Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on note pour $f \in C^0(\Omega)$,
$$⨍_\Omega f := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega f$$
la valeur moyenne de f sur Ω, où $\lambda(\Omega) = \int_\Omega 1\, d\lambda$.

Thm 40 : (Green-Ostrogradski) Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ où Ω est un ouvert borné alors :
$$\int_\Omega (\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS$$
où $dS(x)$ est l'élément de surface infinitésimal en x et où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \vec{\nu} \cdot \nabla u$ où $\vec{\nu}$ est le vecteur unitaire normal à $dS(x)$

[Evans]

Thm 41 : (Formule de la moyenne) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est borné et si $u \in C^2(\Omega)$ alors :

$u \in \mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall r$ tel que $B(x_0,r) \subset \Omega$
$$u(x_0) = ⨍_{\partial B(x_0,r)} u\, dS = ⨍_{B(x_0,r)} u\, dy.$$

Thm 42 : (Principe du Maximum) Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ où Ω est ouvert et borné, et u est harmonique alors :

i) u atteint son maximum sur $\partial\Omega$: $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$.

ii) Si de plus Ω est connexe et il existe $x \in \Omega$ tel que $u(x) = \max_\Omega u$, alors u est constante sur Ω.

Coro 43 : L'équation aux dérivées partielles $\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ pour Ω ouvert, borné et connexe et $g \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C^0(\partial\Omega)$ admet au plus une solution $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Thm 44 : Soit u harmonique sur Ω ouvert et borné. Alors :

1) u est de classe C^∞ sur Ω

2) On a les estimations suivantes :
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = k$, $\forall B(x_0,r) \subset \Omega$, $|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$

où $C_k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(n)} & \text{si } k = 0 \\ \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\alpha(n)} & \text{sinon.} \end{cases}$ où $\alpha(n) = \lambda(B(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

3) u est développable en série entière sur Ω.

Thm 45 : (Liouville) Toute fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^n$ est constante.

Rem 46 : On retrouve le corollaire découlant de l'holomorphie d'une fonction dans un cadre plus général.

Def-Prop 47 : La fonction $\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \times \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}$

définie pour $x \neq 0$ est la solution fondamentale de Laplace ($\Delta\phi = 0$)

Prop 48 : Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Toute solution bornée de $\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme $u(x) = \phi * f(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est constante.

Références :

[Or 4] : Oraux X-ENS, analyse tome 4.
S Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.

[Evans] : Partial Differential Equations
Lawrence C. Evans.

[Zui] : Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles (Cours).
Claude Zuily.

[Bre] : Analyse fonctionnelle - Théorie et applications
Haïm Brezis.