223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Les suites numériques sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques, particulièrement pour approcher les nombres réels ou des solutions d'équations.

I Définitions et premières propriétés

1) Suites, limites, sous-suites [Gou An]

Déf 1 : - On appelle suite numérique toute application $u=(u_n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Elle est dite convergente vers $l\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |u_n-l|\leq\varepsilon$.

Dans ce cas l est unique et est appelée limite de la suite (u_n), on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.
Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

- On appelle sous-suite de (u_n) toute suite (v_n) de la forme $v_n=u_{\varphi(n)}$ où $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante. On appelle valeur d'adhérence toute limite de sous-suite (limite finie).

Ex : $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e.

Prop 1 : - Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.
- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse (ex: $u_n=(-1)^n$).
- Toute suite réelle croissante majorée ou décroissante minorée est convergente.
- Si (u_n) est bornée on peut en extraire une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass)
- L'ensemble Adh(u) des valeurs d'adhérence est fermé. Si (u_n) est bornée et Adh(u) $=\{l\}$, (u_n) converge vers l.

Contre-ex si (u_n) non bornée : $u_n=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ pair}\\ n & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$ Adh(u) $=\{0\}$

Prop 2 : Une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy : $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall p,q\geq N\ |u_p-u_q|\leq\varepsilon$.

Prop 3 : (u_n) converge $\iff \sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Application : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ converge.

2) Suites adjacentes, théorème des gendarmes, moyenne de Césaro [Gou An]

Déf 2 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et $(u_n-v_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. (voir figure 1)

Prop 4 : Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Application : Théorème des valeurs intermédiaires.

Th 1 (des gendarmes) : Si trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient : $\forall n\geq N\ v_n\leq u_n\leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (u_n) aussi.

Ex : $\frac{2n-1}{n}\leq\frac{2n-\sin n}{n}\leq\frac{2n+1}{n}$ donc $\frac{2n-\sin n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$.

Prop 5 (moyenne de Césaro) : Soit (u_n) convergente de limite l, alors la suite (v_n) définie par : $v_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}u_k}{n+1}$ converge vers l. La réciproque est fausse.

Contre-ex : $u_n=(-1)^n$ divergente, $v_n=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$ converge vers 0.

3) Limites inférieure et supérieure [Z-Q]

Déf 3 : $\limsup_n u_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}u_k$ (suite décroissante donc admet une limite éventuellement infinie)

$\liminf_n u_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}u_k$ (suite croissante donc admet une limite éventuellement infinie)

Prop 6 : $\liminf_n u_n\leq\limsup u_n$, avec égalité si et seulement si (u_n) a une limite (finie ou non).
Si (u_n) est bornée, $\liminf_n u_n=\min \text{Adh}(u)$, $\limsup_n u_n=\max\text{Adh}(u)$.

Applications : ① Suites sous-additives : Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que : $\forall n,p\geq0\ u_{n+p}\leq u_n+u_p$. Alors $\frac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}$.

Ex : E $\mathbb{C}$-ev normé, $T\in\mathcal{L}(E)$ continue, $\|T^n\|^{1/n}$ converge.

② Séries entières : le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\limsup_n\sqrt[n]{|a_n|}}$

II. Suites particulières

1) Suites géométriques [GOU An]

Def 4 : Une suite (u_n) est dite géométrique de raison $q\in\mathbb{C}$ si : $\forall n\geq 0\ u_{n+1}=q\cdot u_n$.

Prop 7 : Si $|q|>1$: (u_n) diverge. Si $|q|<1$: (u_n) converge.
Si $|q|=1$: (u_n) converge $\Leftrightarrow q=1$ ((u_n) constante).

2) Suites récurrentes [GOU An, FLO, LAM]

Def 5 : Une suite (u_n) est dite récurrente d'ordre k s'il existe $f:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$ telle que
$\forall n\geq k\ u_n=f(u_{n-1},u_{n-2},\dots,u_{n-k})$

Prop 8 : Si (u_n) converge vers l et si f est continue en $(l,\dots,l)$, alors $l=f(l,\dots,l)$.

Prop 9 : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ telle que $f(I)\subset I$. Soit (u_n) vérifiant $u_0\in I$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=f(u_n)$. (voir figure 5, [LAM])
- Si f est croissante, (u_n) est monotone : croissante si $u_0\leq u_1$, décroissante si $u_0\geq u_1$.
- Si f est décroissante, $f\circ f$ est croissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposés. Rem : $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{} l \Leftrightarrow u_{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{} l$ et $u_{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Ex [FLO] : (u_n) définie par $u_0>-\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$, croissante si $u_0<3$, décroissante si $u_0\geq 3$, converge toujours vers 3 (voir figure 2)

Prop 10 : Si (u_n) est récurrente linéaire, c'est-à-dire vérifiant :
$\forall n\geq k\ u_n=a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\dots+a_ku_{n-k}$ $(a_1\dots a_k\in\mathbb{C})$
l'équation $x^k-a_1x^{k-1}-\dots-a_k=0$ s'appelle équation caractéristique. Si l'on note $r_1\dots r_q$ ses racines et $d_1\dots d_q$ leurs multiplicités, alors (u_n) est de la forme :
$u_n=P_1(n)r_1^n+\dots+P_q(n)r_q^n$ où $P_i\in\mathbb{C}[X]$, $\deg P_i<d_i$

Ex : Suite de Fibonacci : $u_0=0$, $u_1=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, équation caractéristique : x^2-x-1 de racines $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\varphi'^n)$

3) Suites homographiques [GOU An, FLO, ROM]

Def 6 : Une suite (u_n) est homographique si elle vérifie une relation de la forme :
$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=h(u_n)$ avec $h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\neq 0$.

(u_n) est définie pour tout n si et seulement si elle ne prend jamais la valeur $-\frac{d}{c}$.

Prop 11 : On considère l'équation $cx^2-(a-d)x-b=0$. ($\Leftrightarrow h(x)=x$)
- Si elle a deux racines distinctes α,β alors si (u_n) non constante :
$\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=k^n\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ où $k=\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$
- Si elle a une racine double α, alors si (u_n) non constante :
$\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_0-\alpha}+kn$ où $k=\frac{c}{a-\alpha c}$.

Ex [FLO] : $u_{n+1}=\frac{3u_n-2}{2u_n-1}$, racine double $\alpha=1$, $\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{u_0-1}+2n$, $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

III. Applications

1) Caractérisation de la continuité [GOU An]

Prop 12 : $D\subset\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f:D\to\mathbb{C}$ est continue en $a\in D$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)\in D^{\mathbb{N}}$ avec $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $f(u_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$

Ex : $f:[0,2\pi[\ \to\{z, |z|=1\}$, $\theta\mapsto e^{i\theta}$ continue, bijective, f^{-1} non continue en $z=1$ car $e^{i(2\pi-\frac{1}{n})}\xrightarrow[n\to\infty]{}1=e^{i0}$ mais $2\pi-\frac{1}{n}\not\to 0$.

2) Méthode de Newton [ROU] [C-L] (DVPMT) (voir figure 4)

Th 2 : Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(c)<0<f(d)$ et $f'>0$ sur $[c,d]$. Il existe alors un unique $a\in]c,d[$ tel que $f(a)=0$.
Si on définit $F:[c,d]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ et (u_n) par $u_0\in[c,d]$ et $u_{n+1}=F(u_n)$
alors il existe $\alpha>0$ tel que si $u_0\in[a-\alpha,a+\alpha]$, (u_n) converge de façon quadratique vers a, ie il existe $C>0$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\ |u_{n+1}-a|\leq C|u_n-a|^2$.

Autre version pour approcher la plus grande racine d'un polynôme :

Th 3 : Soit $y_1 < \dots < y_r$ des réels, $r_1, \dots, r_r$ des entiers et $P = \prod_{i=1}^{r} (X - y_i)^{r_i}$.
Si $u_0 > y_r$ la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = F(u_n)$ décroît strictement et converge vers y_r.

Application : Si $c>0$, avec $P = X^2 - c$, la suite définie par $u_0 = c+1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{c}{u_n}\right)$ converge de manière quadratique vers $\sqrt{c}$.

3) Sommes de Riemann [Gou An]

Th 4 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors :
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Ex : $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

IV. Approximation des nombres réels

1) Développement décimal / en base b [Rom]

Déf 7 : Soit $x \in \mathbb{R}$, on lui associe deux suites (r_n) et (s_n) définies par :
$$r_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$$

Prop 13 : (r_n) et (s_n) sont adjacentes de limite x. r_n est appelée approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x et s_n par excès. On en déduit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Déf 8 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et (r_n) définie précédemment, on définit (a_n) par $a_0 = E(x)$ et $a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x)$. Alors $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ et $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$; cette écriture est appelée développement décimal illimité propre de x (Rem : $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$)

Prop 14 : La suite (a_n) n'est pas stationnaire à 9. Si on note D' l'ensemble des suites d'entiers de 0 à 9 qui ne stationnent pas à 9, le développement décimal propre réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur D'. **Appl** : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Tous ces résultats sont valables en base $b \geq 2$.

2) Approximation géométrique [Rom]

Approximation de π par la méthode d'Archimède des polygones réguliers :
$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, où $u_0 = 2\sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2}\, 2^n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}$ (voir figure 3).

3) Fractions continues [Gou An Annexe C]

Déf 9 : Soit (a_n) une suite réelle avec $a_n > 0$ pour $n > 0$, on appelle fraction continue l'expression $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ définie par $[a_0] = a_0$, $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$ et $\forall n \geq 2$ $[a_0, \dots, a_n] = \left[a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$

Prop 15 : Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Partant de $y_0 = y$ on définit les suites (a_n) et (y_n) par : $a_n = E(y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $y = [a_0, \dots, a_{n-1}, y_n]$.
Les valeurs $[a_0 \dots a_n]$ sont appelées réduites de y, elles vérifient :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $[a_0 \dots a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$
$q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$
$\forall n \geq 2$ $y = \frac{p_{n-1} y_n + p_{n-2}}{q_{n-1} y_n + q_{n-2}}$.
De plus, $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible ($p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$) et est une approximation fractionnaire de y vérifiant : $\left|y - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$,
et $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $0 < q \leq q_n$, $|qy - p| \geq |q_n y - p_n|$.
On dit que c'est une meilleure approximation fractionnaire de y.

Ex : $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_n = 1$ $\forall n \geq 0$ donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = [1, 1, 1 \dots]$

Th 5 : (Lagrange) Le développement en fraction continue de $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement y est quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients entiers et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Ex : $\sqrt{2} = [1, 2, 2 \dots]$

Application : résolution de l'équation de Pell-Fermat : $x^2 - ny^2 = \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$, à partir du développement en fraction continue de $\sqrt{n}$ (voir [Wi-Zu-Mo3])

Références :

[GOU An] : Gourdon, Analyse
[Z-Q] : Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation
[FLO] : G. Flory, Topologie et Analyse, Tome 1
[LAM] : T. Lambre, L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES, II Analyse
[ROM] : J-E Rombaldi, Éléments d'analyse réelle
[ROU] : Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
[C-L] : Chambert-Loir, Fermigier, Exercices de mathématiques pour l'agrégation
[Gou Al] : Gourdon, Algèbre
[Ni-Zu-Mo] : I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery, An introduction to the theory of numbers
De Biasi

Autres développements possibles : Critère de Weyl, Théorème taubérien faible

Autres idées pour le plan : méthodes d'accélération de la convergence, Suites équiréparties

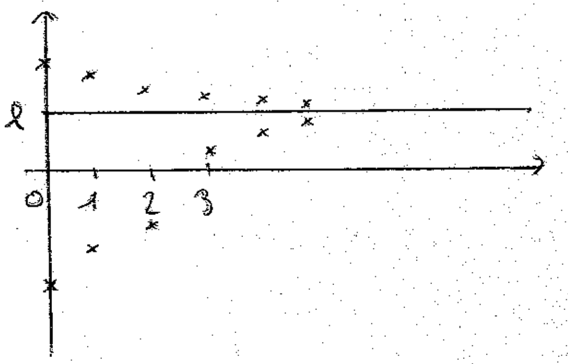


Figure 1 : Suites adjacentes

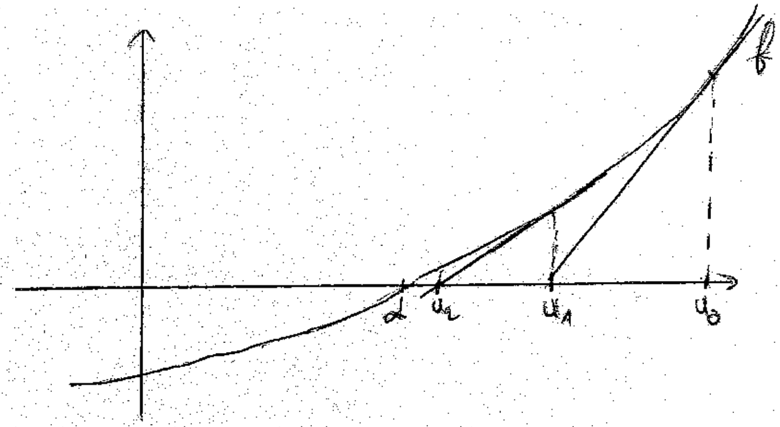


Figure 4 : Méthode de Newton

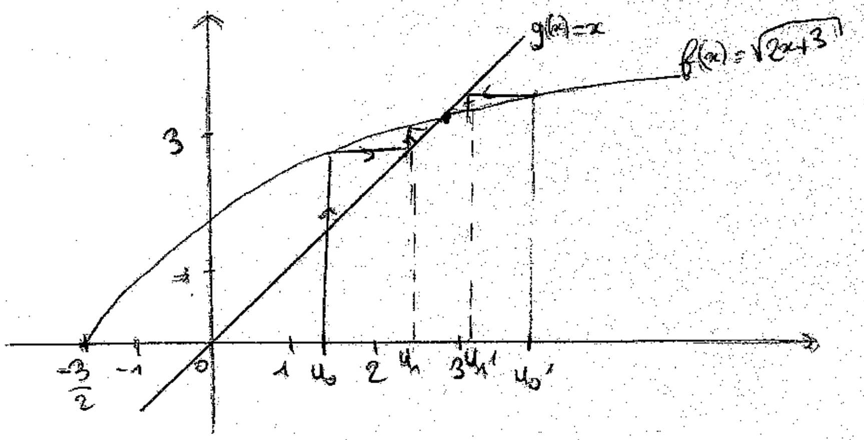


Figure 2 : exemple de suite récurrente : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

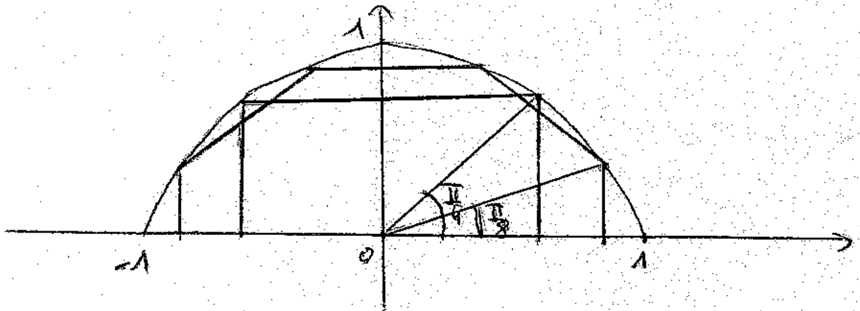
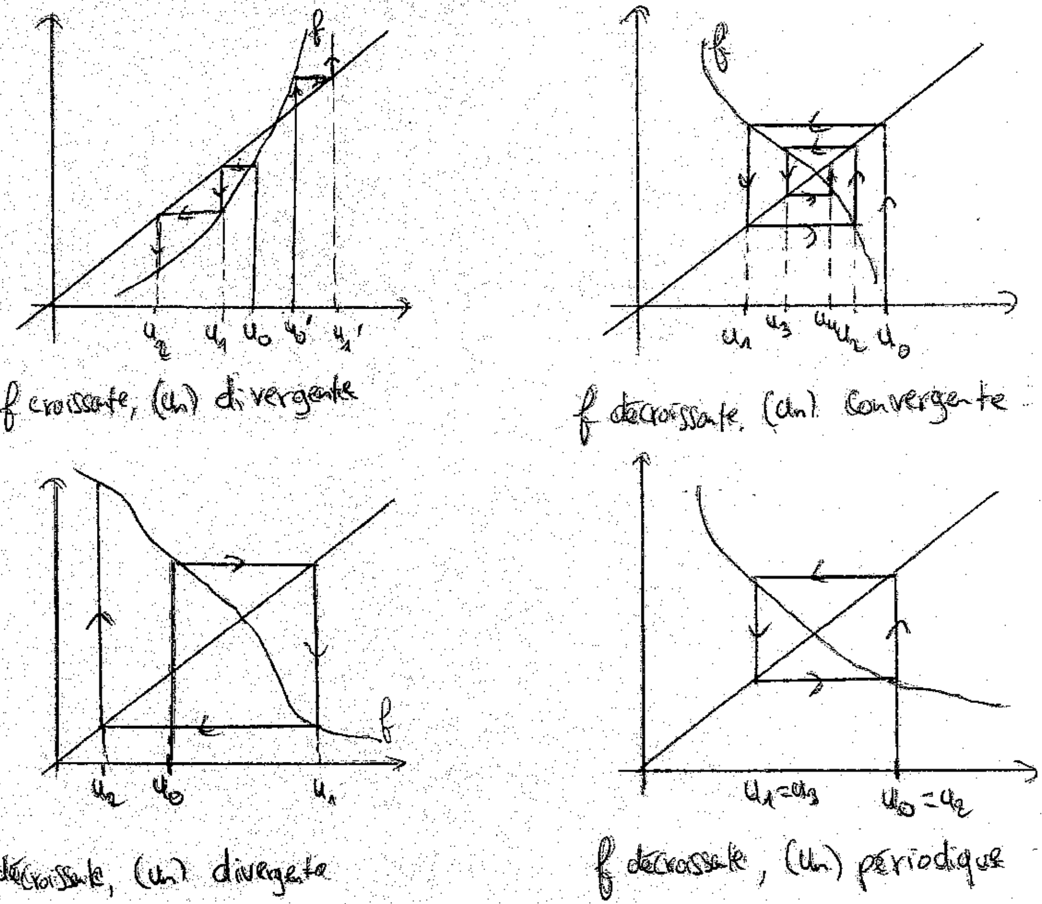


Figure 3 : [illegible] pour approcher π



f croissante, (u_n) divergente

f décroissante, (u_n) convergente

f décroissante, (u_n) divergente

f décroissante, (u_n) périodique

Figure 5 : suites récurrentes différents cas de figure