Bastien Drevon et Frédéric Valet

223

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la suite, toutes les suites seront numériques.

I Convergence des suites numériques

def 1 : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n \geq N, \ |u_n - l| \leq \varepsilon$.
Dans ce cas, l est unique et est appelée limite de la suite.
Une suite est dite divergente si elle ne converge pas.

ex 2 : $(1+1/n)^n \to e$

prop 3 : Toute suite convergente est bornée.

C-ex 4 : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ est bornée et diverge

Th 5 : Toute suite réelle croissante majorée (resp décroissante minorée) converge

prop 6 : $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge ssi (u_n) converge.

application 7 : $\sum 1/n - \ln n$ converge vers γ, la constante d'Euler.

def 8 : On appelle extraction toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

prop 9 : $\varphi(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

def 10 : On appelle sous-suite ou suite extraite d'une suite (x_n) toute suite de la forme $x_{\varphi(n)}$, avec φ extraction

prop 11 : Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

def/prop 12 : Sont équivalents, pour (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
i) l est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
ii) $\forall \varepsilon>0$, il y a une infinité de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ε proche de l.
On dit que l est une valeur d'adhérence, et on note Adh leur ensemble

prop 13 : Adh est fermée

Th 14 : (Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence

Cor 15 : Une suite bornée converge ssi elle a plus une valeur d'adhérence

C-ex 16 : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ a une unique v.a. et ne converge pas.

2) Suites de Cauchy [Gou An, Rom] [Rud]

def 17 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon>0 \, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q>p\geq N, |u_q - u_p| \leq \varepsilon$

prop 18 : Toute suite de Cauchy est bornée

Th 13 : Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Applications 20 :
- Th du point fixe de Banach. (Dev)
- Th de projection sur un convexe dans un Hilbert
- Construction de $\mathbb{R}$ avec les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

3) Suites adjacentes : [Gou An]

def 21 : Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ (voir malice)

prop 22 : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Application 23 : Th des valeurs intermédiaires

Th 24 : (des gendarmes) Si trois suites réelles $(u_n),(v_n),(w_n)$ vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n \quad \forall n$, $u_n \to l$ et $w_n \to l$, alors $v_n \to l$.

ex 25 : $\frac{\sin n}{n} \to 0$ application 25,5 : Comparaison Σ/S

4) Limite inférieure, limites supérieures [Rud] [Gou An] [ZQ]

def 26 : $\limsup\limits_n u_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$ (pour (u_n) suite réelle)
$\liminf\limits_n u_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$

prop 27 : si (u_n) est bornée, $\liminf\limits_n u_n = \inf \mathrm{Adh}$, $\limsup\limits_n u_n = \sup \mathrm{Adh}$

Cor 28 : $\liminf\limits_n u_n \leq \limsup\limits_n u_n$, et s'il y a égalité alors (u_n) converge vers cette valeur commune.

Application 29 : si (u_n) suite de réels positifs vérifie $u_{n+p} \leq u_n + u_p$, alors $\frac{u_n}{n}$ converge.
↳ Pour T un opérateur borné linéaire de E un $\mathbb{C}$-ev, $\|T^n\|^{1/n}$ converge.

II Suites particulières

1) Suites arithmétiques et géométriques [Gou An]

Def 30 : Une suite est dite arithmétique si elle vérifie $u_{n+1} = u_n + a$, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Une suite est dite géométrique si elle vérifie $u_{n+1} = a u_n$, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Prop 31 : Une suite arithmétique vérifie $u_n = u_0 + na$
Une suite géométrique vérifie $u_n = a^n u_0$.
Elle converge si $|a| < 1$ et diverge si $|a| > 1$

2) Suites homographiques [Gou An]

Def 32 : Une suite est dite homographique si elle vérifie $u_{n+1} = h(u_n)$, avec $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$.

Rq 33 : Une telle suite est définie $\forall n$ ssi $u_n \neq \frac{-d}{c}$ $\forall n$

Prop 34 : Soient α, β les racines de l'équation caractéristique
$h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0$

- si $\alpha \neq \beta$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$, $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
- si α racine double, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n - \alpha} = \dfrac{1}{u_0 - \alpha} + kn$, $k = \dfrac{c}{a - \alpha c}$

Ex 35 : Pour $u_0 \neq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$, $u_n \to 0$.

3) Suites récurrentes [Gou An]

Def 36 : Une suite est dite récurrente d'ordre k s'il existe $f : E^k \to E$ / $(E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$
$\forall n \geq k$ $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k})$

Prop 37 : Si une telle suite converge vers l, et si f est continue, alors $l = f(l, \dots, l)$

Prop 38 (cas monotone d'ordre 1). Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ / $f(I) \subset I$, et (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, (u_n) est monotone
- Si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée.

(voir annexe)

Prop 39 (cas linéaire à coefficients constants)
Si $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}$, on note $r_1, \dots, r_q$ les racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leur multiplicité de l'équation caractéristique associée $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$.
Alors l'ensemble de solutions est de la forme
$u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n$, avec $\deg P_i(n) < \alpha_i$

Application 40 : Soit (u_n) / $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci)
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

III Comportement asymptotique

1) Sommation des relations de comparaison : [Gou An]

Prop 41 : $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, avec $u_n = o(v_n)$
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \underset{N\to\infty}{=} o\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} v_n\right).$$
On a le même résultat pour $u_n = O(v_n)$

- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et
$$\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to\infty}{=} o\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right).$$
On a le même résultat pour $u_n = O(v_n)$

Applications 42 : calcul du développement asymptotique de la série harmonique $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Application 43 : (équivalent de Stirling)
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

2) Cesaro [Gou An]

Prop 44 : Soit (u_n) / $u_n \to l$. Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge aussi vers l.

C-ex 45 : $u_n = (-1)^n$ montre que la réciproque est fausse.

Application 46 : Soit $u_0 \in]0,1]$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
Alors $u_n \to 0$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

3) Vitesse de convergence et accélération de convergence : [LAM] [ElA]

Dans cette partie, on suppose $u_n \to l$ et $\forall n, u_n \neq l$.

def 47 : On pose $v_n = |u_n - l|$; et $\lambda_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

prop 48 : si $\lambda_n \to \lambda$, alors $0 \leq \lambda \leq 1$

def 49 : si $\lambda_n \to \lambda$, . si $\lambda = 1$, on dit que la convergence est lente.
. si $\lambda = 0$, on dit que la convergence est rapide.
. si $0<\lambda<1$, on dit que la convergence est géométrique de coefficient λ.

ex 50 : . si $v_n \sim \frac{a}{n^\alpha}$ ou $\frac{a}{\ln n}$, $\lambda = 1$
. si $v_n \sim a\lambda^n$, $0<\lambda<1$
. si $\alpha > 1$, $0<l<1$, et $v_n \sim a\, l^{(\alpha^n)}$, $\lambda = 0$

prop 51 : (Méthode d'accélération de convergence d'Aitken)
Si $0<\lambda<1$, λ est voisin de $\lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$,
ce qui motive $y_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n} = u_{n-1} - \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}$

Alors $y_n \to l$ et $\frac{y_n - l}{u_n - l} \to 0$ (y_n converge plus vite que u_n)

IV Applications :

1) Caractérisation séquentielle de la continuité

prop 52 : $D \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $f : D \to \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \to a$, $f(u_n) \to f(a)$

ex 53 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.

2) Partition d'un entier en part fixé : [Oraux X ENS, analyse 2]

th 53 : Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ premiers dans leur ensemble.
Soit $u_n = \# \{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \ / \ \sum_{i=1}^k a_i x_i = n \}$.
Alors $u_n \sim \frac{1}{\prod a_i} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

DVP 1

3) Méthode de Newton [Rouvière]

th 54 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2, avec $f(c) < 0 < f(d)$, et $\forall x \in [c,d]$, $f'(x) > 0$. On pose $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, et pour $x_0 \in [c,d]$, $x_{n+1} = F(x_n)$

Alors il existe $\alpha > 0$, I un intervalle de longueur 2α / $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge vers l'unique point fixe a de F de façon quadratique.
Si de plus $f'' > 0$, alors pour tout $x_0 \in [c,d]$, on a :
$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$$
(voir annexe)

application 55 : (algorithme de Babylone)
Pour $f(x) = x^2 - a$, $a \geq 0$, et $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_n \to \sqrt{a}$

4) Fractions continues : [Gou AL] [Ron]

def 56 : Pour (a_n) une suite réelle / $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n > 0$, on appelle fraction continue la quantité $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$

notée $[a_0 ; a_1, \dots, a_n, \dots]$.

def prop 57 : Soit p_k / $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ et q_k / $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$
Alors $\frac{p_k}{q_k}$ est irréductible et vaut $[a_0 ; \dots, a_k]$.
C'est le convergent d'ordre k. Il résulte :
$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k \text{ et } q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^k a_k$$
(voir annexe)

th 58 : Tout réel est représentable (c'est à dire limite de la suite des convergents) par une fraction continue de façon unique (presque)

ex 59 : $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$

def 60 : $\frac{p}{q}$ est dite meilleure approximation de $x \in \mathbb{R}$ s'il n'existe pas $\frac{p_2}{q_2}$ plus proche de x avec $q_2 \leq q$.

th 61 : Les meilleures approximations sont des convergents.

ex 62 : $\pi = [3; 7, 15, 1]$, $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$ sont des meilleures approximations de π.

Application 63 : On peut résoudre l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$ à l'aide du développement en fraction continue de $\sqrt{d}$

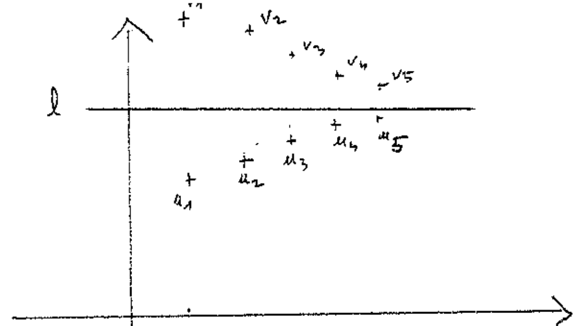

schéma 1 : deux suites adjacentes

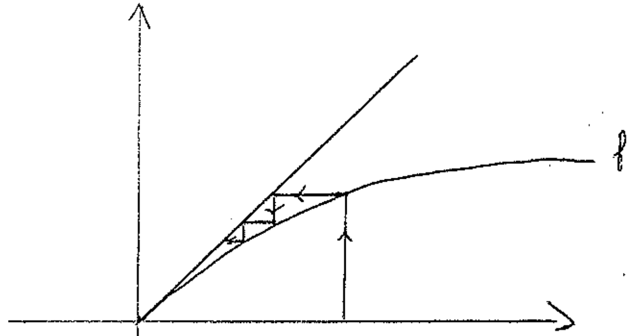

schéma 2 : $u_{n+1} = f(u_n)$, f croissante ~~monotone~~, cas convergent

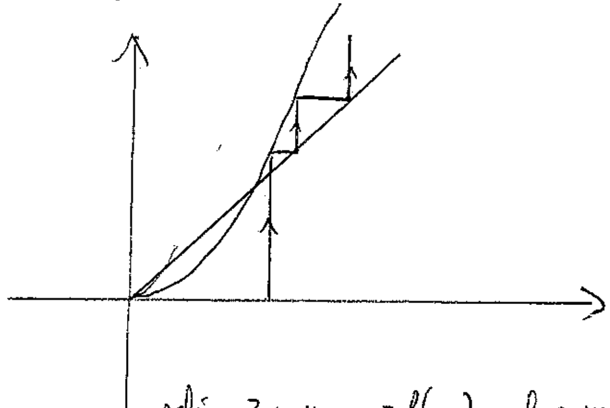

schéma 3 : $u_{n+1} = f(u_n)$ f croissante cas divergent

l'annexe a essentiellement pour référence [LAM]

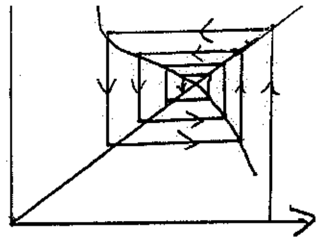

schéma 4 : f décroissante, cas convergent

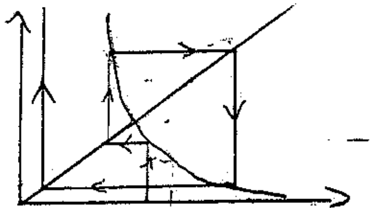

schéma 5 f décroissante, cas divergent

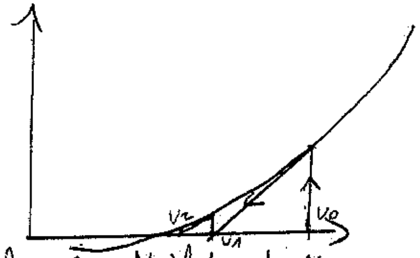

schéma 6 Méthode de Newton

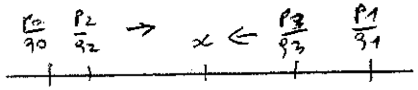

schéma 7 : représentation des convergents de x.

[Rud] Rudin, principe d'analyse numérique
[Rom] Rombaldi, élément d'analyse réelle
[Gou Al] Gourdon Algèbre
[Gou An] Gourdon Analyse
[Z Q] Zuily Queffélec
[Fle] Flory Topologie et analyse tome 1
[Lam] Lambre Épreuve sur dossier à l'agreg
[El A] El Amrani, suites et séries numériques

Méthode de Newton.

Bastien Drevon et Frédéric Valet

2 février 2015

Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière.

Théorème 1. *Soit $f : [c; d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, avec $f(c) < 0 < f(d)$. De plus, pour tout $x \in [c; d]$, $f'(x) > 0$. On définit la fonction F sur $[c; d]$ et la suite récurrente $(x_n)_n$ avec $x_0 \in [c; d]$ par :*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ et } x_{n+1} = F(x_n).$$

Alors, il existe $\alpha > 0$, un intervalle I de longueur 2α, tel que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_n$ converge vers l'unique point fixe a de F. Cette convergence est d'ordre 2.
Si de plus $f'' > 0$, alors pour tout $x_0 \in [a; d]$, on a l'équivalent :

$$(x_{n+1} - a) \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2.$$

Démonstration. Montrons que F admet un unique point fixe.
a est un point fixe de F si et seulement si a est un zéro de f. Or f est strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $[c; d]$ sur $[f(c); f(d)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, par continuité de f, il existe un unique $a \in [c; d]$ tel que $f(a) = 0$. Ceci implique l'unicité du point fixe de F et son existence.
Soit $x \in [c; d]$.

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{f'(x)}.$$

Cependant, le développement de Taylor de f nous donne l'existence de z, un point du segment d'extrémités a et x tel que :

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + (a - x)^2\frac{f''(z)}{2}.$$

D'où

$$F(x) - a = \frac{(a-x)^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}.$$

Dorénavant, posons $C = \sup_{z,x\in[c;d]} \frac{|f''(z)|}{|f'(x)|}$. Cette borne est bien définie et finie, car les applications f'' et f'^{-1} sont continues sur le compact. Soit $\alpha = C^{-1}$. Ceci nous donne :

$$|F(x) - a| \leq \frac{(a-x)^2 C}{2},$$

et pour tout $x \in I =]-\alpha + a; a + \alpha[\cap[c; d]$:

$$|F(x) - a| \leq \alpha,$$

et donc F stabilise I. Si $x_0 \in I$, alors la suite $(x_n)_n$ reste dans I. Il s'ensuit :

$$|F(x_n) - a| \leq \frac{(a - x_n)^2 C}{2} \leq \frac{2}{C}\left(\frac{C(a - x_0)}{2}\right)^{2^{n+1}}.$$

La convergence est donc d'ordre 2, avec $C\alpha/2 \leq \frac{1}{2}$. La conséquence immédiate est que x_n tend vers a.

Supposons que f soit convexe sur $[a; d]$, c'est-a-dire $f'' > 0$. Soit $x \in]a; d]$.
$F(x) < x$ par définition de F, et d'autre part, une égalité précédente nous a donné $F(x) - a > 0$. Donc

$$a < F(x) < x,$$

et ceci implique que la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante (on retrouve la convergence vers l'unique point fixe a). De plus :

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)} \to_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)},$$

car $a \leq z_n \leq x_n \to a$. On retrouve le résultat souhaité. □

Partitions d'un entiers en parts fixées.

Bastien Drevon et Frédéric Valet

1er février 2015

Référence : Oraux X-ENS, analyse 2, Francinou Gianella Nicolas.

Théorème 1. *Soit $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ et premiers dans leur ensemble. On pose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n := Card\left\{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{N}^k \text{ tel que } \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\right\}.$$

On a l'équivalent suivant :

$$u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Démonstration. Pour chaque $i \leq k$, la série $\sum_{x_i \in \mathbb{N}} (z^{a_i})^{x_i}$ est bien définie, et son rayon de convergence est 1. On peut réaliser le produit de Cauchy des k séries sur ce disque de convergence :

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{a_i x_i} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n.$$

Soit à présent la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - z^{a_i}}.$$

f est la série génératrice de la suite $(u_n)_n$. C'est une fraction rationnelle, ayant pour pôles les racines a_i-ièmes de l'unité, pour $i \leq k$. Montrons que 1 est le seul pôle de multiplicité k.
Pour tout i, le polynôme $X^{a_i} - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc 1 est bien une racine simple de ce polynôme. La multiplicité de 1 en tant que pôle de f est donc de k. Réciproquement, si on suppose que ω est un pôle de multiplicité k de f, alors elle est racine de chacun des polynômes $X^{a_i} - 1$. Cependant, les a_i étant premiers dans leur ensemble, le théorème de Bézout nous donne :

$$\exists (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{Z}^k\ ,\ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 1.$$

Ceci entraîne :

$$\omega^1 = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i} = \prod_{i=1}^{k} (w^{a_i})^{x_i} = 1.$$

La seule racine de multiplicité k est donc 1.
On note l'ensemble des pôles de f, qui sont tous sur le cercle unracineité : $P = \{\omega_1, \cdots, \omega_p\}$, avec $\omega_1 = 1$. Par définition des fractions rationnelles :

$$\forall 1 \leq i \leq p\ ,\ \forall 1 \leq j \leq k-1\ ,\ \exists c_{i,j} \in \mathbb{C}\ ,\ \exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ tels que } f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq k-1} \frac{c_{i,j}}{(w_i - z)^j}.$$

Soit $\omega \in P$ et $j \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\left[z \to \frac{1}{(\omega - z)^j}\right]$ est développable en série entière, de rayon de convergence 1.

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\omega^{n+1}}.$$

En dérivant j fois, il découle que :

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j-1} \frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m+j-1}{m} \frac{z^m}{\omega^{m+j}}.$$

Pour retourner à la fonction f :

$$f(z) = \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m+k-1}{m} z^m + \sum_{1 \le i \le p, 1 \le j \le k-1} c_{i,j} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \binom{m+j-1}{m} \frac{z^m}{\omega_i^{m+j}} \right).$$

En identifiant terme à terme sur le disque unité, on obtient :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{1 \le i \le p, 1 \le j \le k-1} c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega_i^{n+j}}.$$

Grâce à l'équivalent :

$$\binom{n+j-1}{n} = \frac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!} \sim \frac{n^{j-1}}{(j-1)!},$$

on obtient, les autres termes étant négligeables :

$$u_n \sim \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer α. Si on identifie f à une fraction rationnelle :

$$f(z)(1-z)^k = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sum_{j=0}^{a_i-1} z^j}.$$

Donc appliquée en 1 :

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sum_{j=0}^{a_i-1} 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}.$$

D'où le résultat final :

$$u_n \sim_{n \to \infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

□