①

223

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

On désigne par suite numérique toute suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans cette leçon, toutes les suites seront numériques.

I. Généralités sur la convergence de suites.

1. Limite de suites.

[AhR] p.12 **Def 1 :** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |u_n - l| \leq \varepsilon$.
On dit qu'une suite (u_n) est divergente si elle ne converge pas.

Thm 2 : Si $(u_n)_n$ converge vers l alors l est unique et est appelée limite de $(u_n)_n$.

Ex 3 : $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 et $v_n = n$ diverge.

p.38 **Appli 4 :** Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ ssi pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ tendant vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

∅ **Ex 5 :** La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

p.12 **Def 6 :** On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est majorée s'il existe un nombre $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq A$.

Def 7 : On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est minorée s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $B \leq u_n$.

Def 8 : On dit qu'une suite (u_n) est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Prop 9 : Toute suite numérique convergente est bornée.

C.Ex 10 : Réciproque fausse : $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

2. Premiers théorèmes de convergence.

p.32 **Prop 11 :** Une suite réelle $(u_n)_n$ monotone et bornée est convergente.

Thm 12 : (Thm des gendarmes). Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite l, alors (u_n) est convergente et sa limite est l. p.19

Ex 13 : La suite $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$ converge vers 0.

Def 14 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si : p.33
i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Thm 15 : Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Ex 16 : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes et convergent vers 1.

Appli 17 : Critère des séries alternées : Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge et les restes $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k\right|$ sont inférieurs à a_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. [Gou] p.206

3. Valeurs d'adhérences

Déf 18 : Soit $(u_n)_n$ une suite. On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite $(u_n)_n$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. [AhR] p.14-p.15

Ex 19 : La suite des termes pairs $(u_{2n})_n$ et celle des impairs $(u_{2n+1})_n$ sont des sous-suites de la suite $(u_n)_n$.

Prop 20 : Pour toute application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Prop 21 : Si une suite $(u_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ est convergente et converge vers l.

Déf 22 : On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$, tout élément de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

Ex 23 : $u_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérences : -1 et 1.
$v_n = \cos(n)$ a pour valeurs d'adhérences tout $[-1, 1]$.

Prop 24 : Toute suite convergente n'admet qu'une unique valeur d'adhérence.

Rmq 25 : Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérences diverge.

Ex 26 : $(-1)^n$ diverge car -1 et 1 sont des valeurs d'adhérences.

Rmq 27 : Une suite possédant une unique valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

Ex 28 : $(1-(-1)^n)n$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence mais diverge.

p°36-37 **Thm 29 :** Bolzano-Weierstrass. Dans $\mathbb{R}$ toute suite bornée possède au moins une sous-suite qui converge.

Rmq 30 : Le théorème reste vrai dans $\mathbb{C}$.

∅ **App 31 :** Théorème de Heine : Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un segment, est uniformément continue sur I.

p°353-p°354 **Déf 32 :** Soit (u_n) une suite réelle, on définit $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$ par $\limsup_n u_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k \geq n} u_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\liminf_n u_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} u_k) \in \overline{\mathbb{R}}$

Prop 33 : $\liminf_n u_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} u_k) \leq \limsup_n u_n = \inf_n (\sup_{k\geq n} u_k)$ avec égalité si et seulement si u_n converge vers cette valeur commune.

Ex 34 : $u_n = 2 + \cos(\frac{n\pi}{2})$ alors $\liminf_n u_n = 1$ et $\limsup_n u_n = 3$

Prop 35 : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $adh(u_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérences alors $\liminf u_n = \inf(adh(u_n))$ et $\limsup_n (u_n) = \sup(adh(u_n))$.

4 Suites de Cauchy

p°34-35 **Déf 36 :** On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $m \geq N$ et tout $n \geq N$ on ait $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Prop 37 : 1) Toute suite convergente est de Cauchy.
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy
3) Toute suite de Cauchy est bornée.

Thm 38 : Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy est convergente. Cela reste vrai dans $\mathbb{C}$.

Ex 39 : La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy $|u_{2n} - u_n| \geq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$

[Pom] p°25 **Appli 40 :** Construction de $\mathbb{R}$ avec les suites de Cauchy.

II. Exemples de suites particulières

1) Suites arithmétiques et suites géométriques

Déf 41 : On dit que la suite $(u_n)_n$ est arithmétique s'il existe $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) tel que $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_n = na + u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [Gou] p°193

Déf 42 : On dit que la suite $(u_n)_n$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) tel que $u_{n+1} = q u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_n = q^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prop 43 : Une suite géométrique $u_n = q^n u_0$ converge vers 0 si $|q| < 1$, diverge si $|q| > 1$, et constante si $q = 1$.

2) Récurrences homographiques

Déf 44 : On dit qu'une suite $(u_n)_n$ vérifie une récurrence homographique si elle vérifie $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $ad-bc \neq 0$ et est bien définie si $u_n \neq \frac{-d}{c}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prop 45 : Soit u_n vérifiant une récurrence homographique. On considère l'équation (E) : $h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$

1) Si (E) a deux racines distinctes α, β alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \left(\frac{a-\alpha c}{a - \beta c}\right)^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$

2) Si (E) admet une racine double α alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{c}{a - \alpha c} n$

Ex 46 : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ avec $u_0 = 1$ l'équation (E) est : $x^2 = 0$

Donc $\frac{1}{u_n} = 1 + n$ càd $u_n = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Suites équiréparties

Déf 47 : Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on pose $S_n(a,b) = \#\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b[\}$. Alors $(u_n)_n$ est dite équirépartie si $\frac{S_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout $0 \leq a < b \leq 1$. [X ENS ANA 2] p°46

Thm 48 : Critère de Weyl

DEV

Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]$. On a équivalence entre :

1) $(u_n)_n$ est équirépartie
2) Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(x)dx$
3) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$

Cor 49 : Somme de Riemann. Si $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Ex 50 : $\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$

[Gou] p.192

4) Suites récurrentes

Déf 51 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ est appelé suite récurrente.

Prop 52 : (cf annexe) Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente.
1) Si f est croissante, la suite $(u_n)_n$ est monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$.
2) Si f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposé.

Prop 53 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente. Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ et f continue en ℓ.
Alors on a $\ell = f(\ell)$.

Ex 54 : $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$. $(u_n)_n$ converge vers 1.

Ex 55 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ alors si $(u_n)_n$ converge on a que sa limite est -1 ou 3.

[Rou] p.142

Appli 56 : Méthode de Newton

DEV

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $c<d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$.
Soit a l'unique zéro de f sur $[c,d]$. On pose $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Alors
1) $\exists z \in (a,x)$ tq $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
2) $\exists C > 0$ tq $\forall x \in [c,d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et $\exists \alpha > 0$ tq $F(I) \subset I$ avec $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ et $\forall x_0 \in I$ la convergence de $(x_n)_n$ vers a est d'ordre 2.
3) Si de plus $f''(x) > 0$ sur $[c,d]$ Alors $I = [a,d]$ est stable par F et $\forall x_0 \in I$ $(x_n)_n$ est strictement décroissante avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$.

III. Comportement asymptotique.

1. Comparaison asymptotique.

[AnR] p.25

Déf 57 : $(u_n)_n$ est négligeable devant une suite réelle positive $(v_n)_n$ et on note $u_n = o(v_n)$, si :
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|u_n| \leq \varepsilon v_n$

Ex 58 : Si $(u_n)_n$ converge vers 0 alors on a $u_n = o(1)$.

Déf 59 : $(u_n)_n$ est équivalente à une suite (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $(u_n - v_n)$ est negligeable devant $(|u_n|)$.

[Gou] p.202

Thm 60 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries à termes positifs, telles que $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$. Alors :
1) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$ pour $n \to \infty$.
2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ pour $n \to +\infty$.

p.203

Appli 61 : Developpement asymptotique de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$

2. Formule de Stirling

[AnR] p.82

Prop 62 : Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à une suite $(a_n)_n$ c-a-d. $u_n = a_n - a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$. Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature et en cas de convergence, on a : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0$.

[Gou] p.211

Appli 63 : Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

3. Lemme de Cesàro.

[AnR] p.53

Prop 64 : (Moyenne de Cesàro) : Soit $(u_n)_n$ une suite numérique qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors $(v_n)_n$ définie par $v_n := \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ. On dit que $(u_n)_n$ converge en moyenne de Cesàro vers ℓ.

Appli 65 : Soit $(u_n)_n$ une suite tq la sous-suite $(u_{2n})_n$ converge vers a et la sous-suite $(u_{2n+1})_n$ converge vers $b \in \mathbb{R}$ alors la moyenne de Cesàro de $(u_n)_n$ converge vers $\frac{a+b}{2}$.

Annexes

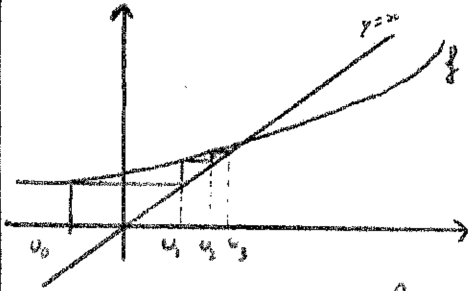

Figure 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante cas $(u_n)_n$ croissante

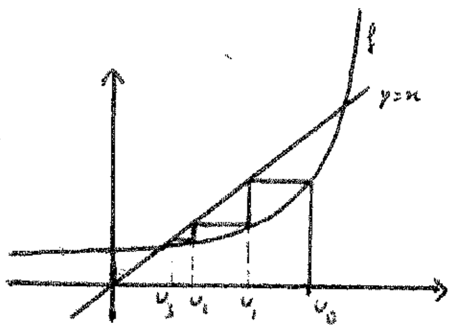

Figure 2 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante cas $(u_n)_n$ décroissante

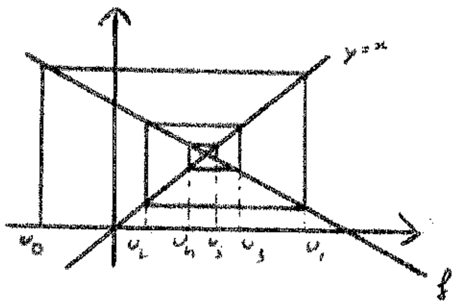

Figure 3 $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante

Références

① [AMR]. El-Amrani - Suites et séries numériques.

② [GOU]. Gourdon - Analyse

③ [XENS]: Oraux X-ENS - Analyse 2

④ [ROU]. Rouvière - Petit guide du calcul diff.

⑤ [POM] : Pommellet - Agrégation mathématiques.

Définition 0.1 : Suite équirépartie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. Pour $0 \le a < b \le 1$, on pose

$$S_n(a,b) := Card\{k \in \{1,...,n\}, u_k \in [a,b]\}.$$

On dit que la suite $(u_n)_n$ est équirépartie ssi $\dfrac{S_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout $0 \le a < b \le 1$.

Théorème 0.2 : Critère de Weyl

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. On a équivalence entre :

1. $(u_n)_n$ est équirépartie ;
2. Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt;$$
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0.$$

Démonstration.
On remarque tout d'abord que :

$$\frac{S_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b]}(u_k),$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique du segment $[a,b]$.

➤ (1) $\Rightarrow$ (2) :
On a

$$\int_0^1 \chi_{[a,b]}(t)dt = b-a.$$

La propriété (2) est donc vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment. En fait, toute fonction en escalier f sur $[0,1]$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segment (éventuellement réduits à un point pour obtenir les valeurs de f en ses points de discontinuité). Par linéarité de l'intégrale, la propriété (2) est donc vraie pour toute fonction en escalier.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\epsilon > 0$. Par densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues sur un segment, il existe une fonction g en escalier telle que $||f-g||_\infty \le \epsilon$. Soit $n \ge 1$, on a :

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f(t)dt| \le \underbrace{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(u_k)-g(u_k))|}_{\le\epsilon} + |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g(t)dt| + \underbrace{|\int_0^1 (g(t)-f(t))dt|}_{\le\epsilon}.$$

Comme la propriété (2) est vérifiée pour les fonctions en escalier, il existe un entier $N > 0$ telle que pour tout $n \ge N$,

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g(t)dt| \le \epsilon.$$

On a donc pour tout $n \geq N$,

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f(t)dt| \leq 3\epsilon,$$

et donc (2) est vérifiée.

➤ (2) ⇒ (1) :
Une fonction caractéristique d'un segment distinct de $[0,1]$ présente au moins une discontinuité, donc ne peut pas être obtenue comme limite uniforme de fonctions continues. En fait, on va procéder par encadrement.
Soient $0 < a < b < 1$. Pour p suffisament grand, on peut définir deux fonctions ψ_p et ϕ_p continues sur $[0,1]$ comme suit : ϕ_p (resp. ψ_p) est nulle sur $[0,a] \cup [b,1]$ (resp. sur $[0, a-\frac{1}{p}] \cup [b+\frac{1}{k}, 1]$), constante égale à 1 sur $[a+\frac{1}{p}, b-\frac{1}{k}]$ (resp. sur $[a,b]$) et affine partout ailleurs (cf dessin).
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ suffisament grand, on a alors $\phi_p \leq \chi_{[a,b]} \leq \psi_p$. Donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k) \leq \frac{S_n(a,b)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k). \qquad (a)$$

Par hypothèse,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k) = \int_0^1 \phi_p(t)dt = b-a-\frac{1}{p},$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k) = \int_0^1 \psi_p(t)dt = b-a+\frac{1}{p}.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ suffisament grand tel que $\frac{1}{p} < \epsilon$. En passant à la limite supérieure à droite et à la limite inférieure à gauche dans (a), on obtient :

$$b-a-\epsilon \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\, S_n(a,b) \leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\, S_n(a,b) \leq b-a+\epsilon.$$

Donc,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\, S_n(a,b) = \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\, S_n(a,b) = b-a.$$

On a donc montré (1). Dans le cas où $a=0$ ou $b=1$, il suffit d'adapter les ϕ_p et les ψ_p et on obtient le résultat.

➤ (2) ⇒ (3) :
Immédiat en décomposant $e^{2i\pi p u_k}$ en partie réelle et imaginaire, et en appliquant l'hypothèse (2).

➤ (3) ⇒ (2) :
Par linéarité, on a la propriété (2) pour tout polynôme trigonométrique de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi x),$$

l'intégrale d'une telle fonction étant a_0.
D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de ce type. Comme précédemment, on en déduit que (2) est vérifié pour une telle fonction continue.
Si f ne vérifie pas la condition $f(0) = f(1)$, on peut, pour tout $\epsilon > 0$ construire une fonction continue g vérifiant $g(0) = g(1)$ et $\int_0^1 |f-g| \leq \epsilon$ (cf dessin). De la même manière que pour l'implication (2) ⇒ (1), on montre (2) pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On a montré que les propositions (1), (2) et (3) sont équivalentes.

□

Développement: Méthode de Newton

Adrien Fontaine

4 décembre 2012

Référence : Rouvière, exercice 49p152

1 Développement

Théorème 1

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. Soit a l'unique zéro de f sur le segment $[c,d]$. On considère la fonction

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors,

1. *Il existe $\alpha > 0$ tel que si I désigne le segment $[a-\alpha, a+\alpha]$, alors $F(I) \subset I$ et la suite définie par*
$$x_0 \in I, \forall n \geq 0, x_{n+1} = F(x_n)$$
a une convergence d'ordre deux vers a dans I : il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$$
2. *Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors l'intervalle $I = [c,d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) est strictement décroissante (ou constante) avec*
$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$
$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$
(pour cet équivalent, on a besoin de $x_0 > a$).

Démonstration : 1. Remarquons tout d'abord que, f étant strictement croissante sur $[c,d]$ (car $f' > 0$ sur $[c,d]$) et vérifiant l'inégalité $f(c) < 0 < f(d)$, f a bien un unique zéro dans l'intervalle $]c,d[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour $x \in [c, d]$, on a :

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \text{ car } f(a) = 0$$
$$= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

Or, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et a (ou entre a et x selon la position de x), il existe $z_x \in]x, a[$ ou $]a, x[$ tel que :

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + f''(z_x)\frac{(a-x)^2}{2}$$

Et on obtient donc

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Donc, si on pose $C = \frac{\max_{[c,d]} |f''|}{2 \min_{[c,d]} |f'|}$, on a :

$$\forall x \in [c, d], |F(x) - a| \leq C|x - a|^2$$

Soit alors $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha] \subset [c, d]$ et $C\alpha < 1$. On a alors :

$$\forall x \in I, |F(x) - a| \leq C\alpha^2 = C\alpha \times \alpha < \alpha$$

Donc, $F(I) \subset I$.
On peut alors définir la suite (x_n) :

$$x_0 \in I, \forall n \geq 0, x_{n+1} = F(x_n)$$

Et cette suite vérifie,

$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$$

Et donc, par récurrence immédiate :

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \to 0$$

D'où la convergence d'ordre 2 de x_n vers a, puisque $C\alpha < 1$.

2. On suppose maintenant $f'' > 0$. La dérivée f' est donc croissante, et la fonction f est une fonction convexe sur l'intervalle $]c, d[$. Pour $a \leq x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$$

avec inégalité stricte si $x > a$. Par ailleurs, on a :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$$

strictement si $x > a$.
On a donc, pour tout $x \in [a, d]$, $a \leq F(x) \leq x \leq d$. Ainsi, l'intervalle $[a, d]$ est stable par F. Par ailleurs, pour $a < x_O \leq d$, les itérées x_n vérifient aussi $a < x_n \leq l$ et forment une suite décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est constante. La suite (x_n) admet donc une limite l, qui vérifie $F(l) = l$ et donc $f(l) = 0$ et l ne peut être que a.
La convergence de (x_n) vers a est quadratique : on a comme précédemment

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale : si $a < x_0 \leq d$, on a $x_n > a$ pour tout n et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

ou l'on a noté les $z_n = z_{x_n}$, avec $a < z_n < x_n$. La fraction tend donc vers $f''(a)/2f'(a)$ lorsque n tend vers l'infini. ∎

2 Interprétation de la méthode de Newton

2.1 Interprétation géométrique

L'égalité

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

peut se réécrire sous la forme

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui exprime que $x_{n+1} = F(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.

2.2 Interprétation comme problème de point fixe

Pour résoudre $f(x) = 0$ on cherche à transformer l'équation en un problème équivalent de $F(x) = x$. Une idée est de considérer $F(x) = x + \lambda(x) f(x)$, où λ est une fonction ne s'annulant pas. La convergence des itérés $x_{n+1} = F(x_n)$ vers la solution a cherchée sera très rapide si ce point est superattractif (voir Rouvière, exercice 48p149) i.e $F'(a) = 0$. Ceci incite à choisir, $\lambda(x) = -1/f'(x)$.