223

Suites numériques - Convergence, valeurs d'adhérence - Ex et Appli.

Dans la suite, (u_n) désigne une suite numérique, i.e à valeurs ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de $|\cdot|$.

I. Suites numériques et convergence.

1. Convergence dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def 1 : On dit que (u_n) est bornée s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_n|\le M$.

Def 2 : Soit $\ell\in\mathbb{C}$. On dit que (u_n) admet une limite ℓ si $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ge 0\ \forall n\ge N\ |u_n-\ell|\le\varepsilon$.

Rq 3 : Une suite qui ne converge pas, diverge.

Ex 4 : $(1/n)$ converge vers 0.

Prop 5 (Unicité de la limite) : Si (u_n) admet une limite alors elle est unique.

Thm 6 : L'ensemble X des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes est une sous $\mathbb{K}$-algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'application limite est un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres de X dans $\mathbb{K}$.

Prop 7 (Caractérisation séquentielle de la continuité). Soit $\ell\in\mathbb{C}$. Une fonction $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ est continue au point ℓ ssi pr tte suite (u_n) convergente vers ℓ, $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Ex 8 : $(\cos(1/n))$ converge vers $\cos(0)=1$.

Prop 9 : Soient $(x_n),(y_n)$ deux suites réelles, l_1, l_2 deux réels. Posons pr $\forall n\in\mathbb{N}$ $z_n=x_n+iy_n$. Alors
$$\lim z_n=l_1+il_2 \iff \begin{cases}\lim x_n=l_1\\ \lim y_n=l_2\end{cases}$$

Prop 10 : Toute suite convergente est bornée.

Ex 11 : × $(\exp(1/n))$ converge vers 1 et est bornée par e.
× mais $((-1)^n)$ est bornée par 1 et diverge.

2. Convergence dans $\mathbb{R}$ et ordre (ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Def 12 : On dit que (u_n) est majorée (resp minorée) s'il existe $A\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\le A$ (resp $u_n\ge A$).

Def 13 : On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si $\forall A\in\mathbb{R}\ \exists N\ge 0\ \forall n\ge N\ u_n\ge A$ (resp $u_n\le A$)

Ex 14 : $(n!)$ diverge vers $+\infty$.

Thm 15 : × Si (u_n) est croissante majorée alors elle a une limite finie et $\lim u_n=\sup u_n$
× Si (u_n) est décroissante minorée alors elle a une limite finie et $\lim u_n=\inf u_n$.

Rq 16 : Si (u_n) est croissante non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Ex 17 : $(1+1/n)$ est décroissante minorée par 1. Elle converge vers 1.

Thm 18 (des encadrements) : Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ tq à partir d'un certain rang $u_n\le v_n\le w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent et ont la même limite $\ell\in\mathbb{R}$ alors v_n converge et a pour limite ℓ.

Ex 19 : $\forall n\ge 1$ $-\frac{1}{n}\le\frac{\cos(n)}{n}\le\frac{1}{n}$ d'où $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ cv vers 0.

Def 20 : Les suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim(u_n-v_n)=0$.

Thm 21 : Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont la même limite, notée ℓ. De plus, pr $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\le\ell\le v_n$.

Ex 22 : $(u_n=1-1/n)$ et $(v_n=1+1/n)$ sont adjacentes et convergent vers 1.

3. Suites de Cauchy.

Def 23 : On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ge 0\ \forall n\ge N\ \forall m\ge N\ |u_n-u_m|\le\varepsilon$.

Prop 24 : × Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
× Toute suite de Cauchy est bornée.

Ex 25 : $(\sin(1/n))$ est convergente donc de Cauchy, bornée par 1.

Thm 26 : Dans $\mathbb{K}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Rq 27 : Ce thm se traduit par le fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Ex 28 : $\left(\sum_{k=1}^{n}1/k\right)$ n'est pas convergente car n'est pas de Cauchy.

4. Lemme de Césaro et comparaison de suites

a. Lemme de Césaro.

Thm 29 (Césaro) Soit (u_n) convergente de limite $\ell\in\mathbb{C}$. Alors $\left(\frac{u_1+\dots+u_n}{n}\right)$ converge et a pour limite ℓ.

Ex 30 : $(u_n=1/n)$ a pr moyenne de Césaro $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$ qui cv vers 0

Rq 31 : La réciproque est fausse : $((-1)^n)$ diverge mais
$$v_n=\frac{(-1)+(+1)+\dots+(-1)^n}{n}=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$
d'où $\lim v_n=0$

b. Comparaison de suites.

Def 32 : On dit que (u_n) est dominée par une suite réelle positive (α_n) s'il existe $A\in\mathbb{R}^+$ et $N\in\mathbb{N}$ tq pr $\forall n\ge N$ $|u_n|\le A\alpha_n$.
On note $u_n=O(\alpha_n)$.

* On dit que (u_n) est négligeable devant une suite réelle positive (α_n) si pr $\forall \varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq pr $\forall n\geq N$ $|u_n|\leq \varepsilon \alpha_n$.
On note $u_n = o(\alpha_n)$.

Ex 33 : * Si (u_n) est bornée, $u_n = O(1)$
* Si $u_n \to 0$, $u_n = o(1)$.

Def 34 : On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $(u_n - v_n)$ est négligeable devant $(|u_n|)$. On note $u_n \sim v_n$.

Prop 35 : Si $u_n \sim v_n$ et $\lim u_n = \ell$ alors (v_n) converge et $\lim v_n = \ell$.

Rq 36 : Lemme de Cesaro : si $\lim u_n = \ell$ alors $u_1 + \dots + u_n \sim n\ell$.

Prop 37 (Formule de Stirling) : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.

II - Valeurs d'adhérence

1. Convergence et valeurs d'adhérence

Def 38 : On appelle suite extraite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Ex 39 : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de (u_n).

Lemme 40 : On a pr $\forall n\in\mathbb{N}$ $\varphi(n)\geq n$.

Prop 41 : Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.

Def 42 : On dit que $\ell\in\mathbb{C}$ est valeur d'adhérence de (u_n) si ℓ est limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

Ex 43 : $((-1)^n)$ a 2 valeurs d'adhérence 1 et -1.

Prop 44 : Une suite qui possède au moins 2 valeurs d'adhérence, diverge.

Ex 45 : $((-1)^n)$ diverge.

Rq 46 : Une suite qui a une seule valeur d'adhérence ne converge pas forcément : $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ n'a que 1 comme valeur d'adhérence mais ne converge pas car (u_{2n+1}) diverge vers $+\infty$.

Prop 47 : Il y a équivalence entre :
* ℓ est valeur d'adhérence de (u_n)
* $\forall \varepsilon>0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \exists n\geq p\ |u_n-\ell|\leq\varepsilon$.
* $\forall p\in\mathbb{N}$ $\ell\in\overline{A_p}$ où $A_p = \{u_n\ n\geq p\}$.
* ℓ est point d'accumulation de $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. C'est un fermé.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite de Cauchy converge si admet une (49) v.a.

~~Prop 48 : Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence ℓ est convergente de limite ℓ.~~

Thm 49 (Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Prop 50 : Une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, converge.

Ex 51 : $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1+\frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est bornée par 2, a pour seule valeur d'adhérence 1 et converge vers 1.

2. Limites supérieures et inférieures (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Def 52 : On appelle limite supérieure (resp inférieure) de (u_n) $L = \inf_{n\geq 0} (\sup_{k\geq n} u_k)$ (resp $\ell = \sup_{n\geq 0} (\inf_{k\geq n} u_k)$). On note $\limsup u_n$ (resp $\liminf u_n$).

Prop 53 : * La limite inférieure de (u_n) (resp supérieure) est la plus petite (resp grande) de ses valeurs d'adhérence, si celle-ci est finie.
* $\liminf u_n \leq \limsup u_n$
* (u_n) converge vers $u\in\mathbb{R}$ ssi $\liminf u_n = \limsup u_n = u$

Ex 54 : $((-1)^n)$ vérifie $\liminf u_n = -1$, $\limsup u_n = 1$.

III - Suites classiques

1. Suites arithmétiques et géométriques

a- Suites arithmétiques

Def 55 : Soient $a, r \in\mathbb{K}$, (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme a et de raison r si $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = u_{n-1} + r,\ n\geq 1. \end{cases}$

Prop 56 : Ds ce cas, pr $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n = a + nr$.

b- Suites géométriques

Def 57 : Soient $a, q\in\mathbb{K}$, (u_n) est une suite géométrique de 1er terme a et de raison q si $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = q u_{n-1},\ n\geq 1. \end{cases}$

Prop 58 : Dans ce cas, pr $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n = a r^n$.
De plus,
* si $|q|<1$, $\lim u_n = 0$
* si $|q|>1$, (u_n) diverge
* si $q = 1$, (u_n) est constante égale à 1
* si $|q| = 1$, $q\neq 1$, (u_n) diverge.

c- Suites arithmético-géométriques

Def 59 : Soient $a, r, q\in\mathbb{K}$, (u_n) est dite arithmético-géométrique si $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = q u_{n-1} + r,\ n\geq 1. \end{cases}$

Rq 60 : On peut trouver une écriture de (u_n) en fonction de n et la convergence ou divergence s'en suit.

2- Suites récurrentes du type $U_{n+1} = f(U_n)$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Def 61 : Une suite récurrente (U_n) est définie par la donnée de $U_0 \in \mathbb{R}$ et de $U_{n+1} = f(U_n)$, $n \geq 0$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Elle est bien définie si $f(I) \subset I$.

Prop 62 : Soit (U_n) une suite récurrente.
- Si f est croissante sur I, alors (U_n) est monotone.
- Si f est décroissante sur I, les suites extraites paires et impaires sont monotones de sens de variation opposés.

Ex 63 : (U_n) définie par $U_{n+1} = \sin(U_n)$, $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $U_0 \in I$. Elle est croissante si $U_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et décroissante si $U_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Prop 64 : Si (U_n) converge vers $\ell \in I$ alors $\ell = f(\ell)$.

Rq 65 : C'est un corollaire de la caractérisation séquentielle de la continuité.

Ex 66 : Si $U_0 = 1$ et $f : x \mapsto x^2 - x - 3$, les seules limites possibles de (U_n) sont -1 ou 3.

(*) **Thm 67** : (Méthode de Newton) : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, s'annulant en un unique point a tel que $c < a < d$ et vérifiant $f'(x) \neq 0$ pour $x \in [c,d]$.
On définit $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ par
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{pour } x \in [c,d].$$
Alors
1. Il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par φ et tel que la suite récurrente définie par $\begin{cases} U_0 \in I \\ U_{n+1} = \varphi(U_n), n \geq 0 \end{cases}$ converge vers a à l'ordre au moins 2 : $\exists C > 0 \ \forall n \geq 0 \ |U_{n+1} - a| \leq C |U_n - a|^2$.
2. Si en plus $f''(a) > 0$ alors la convergence est d'ordre 2 exactement avec $U_0 \in]a, a+\alpha]$:
$$U_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)} (U_n - a)^2.$$

(voir dessins en annexes)

Thm 68 : (Point fixe de Picard). Si f est k-contractante de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, alors il existe un unique $a \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = a$. De plus, pour tout $U_0 \in \mathbb{K}$, (U_n) converge vers a de façon géométrique :
$$\text{pr } \forall n \geq 1 \quad |U_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k} |U_1 - U_0|$$

Rq 69 : Ce thm est vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il est vrai en général sur tout espace métrique complet.

3- Suites équiréparties.

Def 70 : Soit (U_n) une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $S_n(a,b) = \text{Card}\{k \in [\![1,n]\!], U_k \in [a,b]\}$, $n \geq 1$.
On dit que (U_n) est équirépartie si pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ $\lim \frac{S_n(a,b)}{n} = b - a$.

Thm 71 (Critère de Weyl) (*)
Soit (U_n) une suite de $[0,1]$. On a équivalence entre :
- (U_n) est équirépartie
- Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) = f(1)$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(U_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$
- $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(2i\pi p U_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rq 72 : Ce thm est encore vrai si f ne vérifie pas $f(0) = f(1)$.

Ex 73 : $(\{n\theta\})$ est équirépartie ssi θ est irrationnel, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.

Amrani Suites et Séries

Gourdon Analyse

Rouvière (Newton)

Oraux X-ENS : Analyse 2 (Weyl).

Annexes :

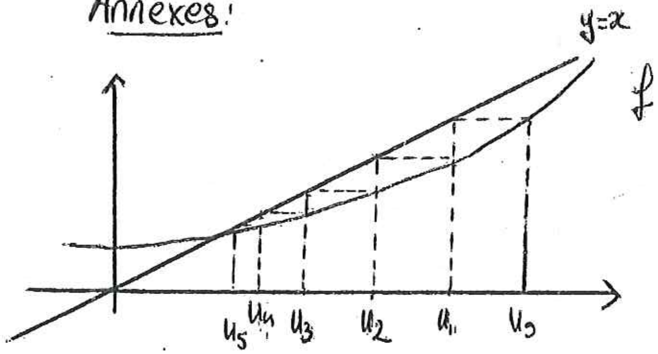


Fig 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

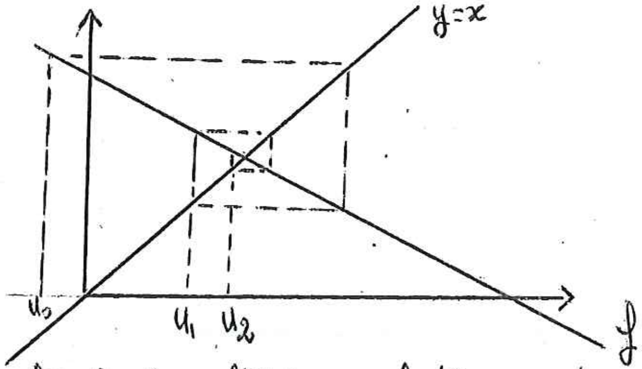


Fig 2 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante.

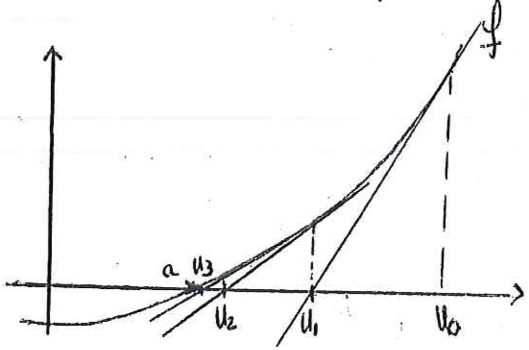


Fig 3 : Méthode de Newton

Critère de Weyl

Déf : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0\leq a\leq b\leq 1$, on pose

$$S_n(a,b) = \text{Card}\{k\in [\![1,n]\!],\ u_k\in[a,b]\}$$

On dit que (u_n) est équirépartie ssi $\frac{S_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a \quad \forall a,b \ a<b$.

Critère de Weyl : Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. On a équivalence entre

1. (u_n) est équirépartie
2. Pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue avec $f(0)=f(1)$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$
3. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(2i\pi p u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Dém : . On commence par remarquer que

$$S_n(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(u_k)$$

$1\Rightarrow 2$: 1ère étape : les fonctions indicatrices

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = b-a = \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(a,b)}{n} \quad \text{pour } 0\leq a\leq b\leq 1.$$

2ème étape : les fonctions en escaliers

Toute fonction en escaliers sur $[0,1]$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiq de segments. On conclut avec l'étape 1 et la linéarité de l'intégrale.

3ème étape : les fonctions continues 1-périodiques.

Soit $\varepsilon>0$, par approximation des fonctions continues sur un segment par les fonctions en escaliers, il existe g en escaliers telle que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. $(*)$ On a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum f(u_k) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \overset{\text{I.T}}{\leq} \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum f(u_k) - \frac{1}{n}\sum g(u_k)\right|}_{\leq\varepsilon} + \left|\frac{1}{n}\sum g(u_k) - \int_0^1 g\right|$$

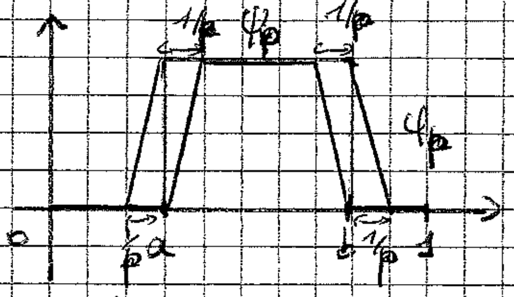
$$+ \underbrace{\left|\int_0^1 g - \int_0^1 f\right|}_{\leq\varepsilon}. \quad \text{par } (*)$$

Or g est en escalier d'où il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \frac{1}{n} \sum g(u_k) - \int_0^1 g(t)\,dt \right| \leq \varepsilon \quad \text{d'où 1 est vérifiée}$$

$2 \Rightarrow 1$: Rq : La fonction caractéristique d'un segment distinct de $[0,1]$ présente au moins une discontinuité donc ne peut être obtenue comme limite uniforme de fonctions continues.

Soient $0 < a < b < 1$. Soit p assez grand tel que nos fonctions ci-dessous restent définies sur $[0,1]$.



On a $\psi_p \leq 1_{[a,b]} \leq \varphi_p$

d'où $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \psi_p(u_k) \leq \frac{S_n(a,b)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi_p(u_k)$

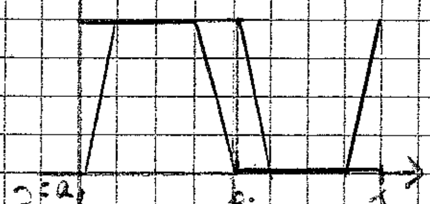
Soit $\varepsilon > 0$, soit p assez grand tel que $1/p < \varepsilon$.

On passe à la limite supérieure à droite et à la limite inférieure à gauche :

$$b-a-\varepsilon \leq \int_0^1 \psi_p(t)\,dt = b-a-\frac{1}{p} \leq \liminf \frac{S_n(a,b)}{n} \leq \limsup \frac{S_n(a,b)}{n} \leq b-a+\varepsilon.$$

d'où $\displaystyle \liminf \frac{S_n(a,b)}{n} = \limsup \frac{S_n(a,b)}{n} = b-a$.

On adapte $a=0$ et $b=1$ simplement en faisant attention d'approcher par des fonctions 1 périodiques :



On a donc 1.

$2 \Rightarrow 3$: On a $\displaystyle \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \exp(2i\pi p u_k) = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \cos(2\pi p u_k) + i \sin(2\pi p u_k)$

$$\overset{(2)}{=} \int_0^1 \cos(2\pi p x)\,dx + i \int_0^1 \sin(2\pi p x)\,dx = 0 \text{ par périodicité}$$

3 ⇒ 1. Par identification partie réelle et imaginaire, on sait que (dans 3 ⇒ 1)

$$\int_0^1 \cos(2\pi p x)\,dx = \frac{1}{n}\sum \cos(2\pi p u_n)$$ et de même pour sinus.

d'où par linéarité, c'est vrai pour toute fonction

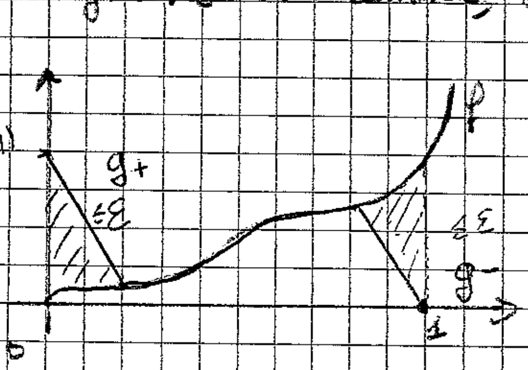
$$x \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi x)$$

D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, toute fonction continue avec $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques du type ci-dessus.

On conclut donc de même que pour $1 \Rightarrow 2$.

Rq : Le théorème reste vrai si dans 2) $f(0) \neq f(1)$. Seule la démo de $3 \Rightarrow 2$ change. Il faut ajouter :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on définit g_- et g_+ comme ci-dessous :



On a $g_- \leq f \leq g_+$

et $\int g_- = \int f - \varepsilon$

$\int g_+ = \int f + \varepsilon$.

d'où on conclut comme $2 \Rightarrow 1$ en passant aux limites supérieure et inférieure.

Un exemple : Soit $\theta > 0$. $(\{n\theta\})_{n \geq 0}$ est équirépartie ssi θ est irrationnel, où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x.

Dém : ⇒ Supposons θ irrationnel, on va utiliser le critère de Weyl ($3 \Rightarrow 1$).

On a

$p \in \mathbb{N}^*$ $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp(2i\pi p k\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{[\exp(2i\pi p\theta)]}_{\neq 1 \text{ car } \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{k} = \frac{e^{2i\pi p\theta}}{n}\,\frac{e^{2i\pi p\theta n} - 1}{e^{2i\pi p\theta} - 1}$$

$e^{2i\pi p\theta n}$ est de module 1 donc $\dfrac{e^{2i\pi p\theta n} - 1}{e^{2i\pi p\theta} - 1}$ est bornée

et donc $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $(\{n\theta\})$ est équirépartie.

⇐ Réciproquement, supposons $\theta = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

Supposons par l'absurde que (u_n) est équirépartie.

$\{(n+q)\theta\} = \{n\theta + p\} = \{n\theta\}$ donc $(\{n\theta\})$ est périodique de période q et donc pas équirépartie.