223

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Déf 1 : (Suite numérique) Une suite numérique est la donnée d'une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note alors souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où u_n désigne $u(n)$.

Cadre : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

I Convergence : définition et premiers exemples

a) Définition

Déf 2 : (Suite convergente) Une suite $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe $\ell\in\mathbb{K}$ tel que :
$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |u_n-\ell|\leq\varepsilon)$$

Prop 3 : (i) Une suite convergente a une unique limite.
(ii) Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et possède la même limite.
(iii) Toute suite convergente est bornée.
(iv) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ convergentes forment une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbres.
(v) Si $u_n\to\ell\in\mathbb{K}^*$ et $v_n\to k\in\mathbb{K}$ alors u_n est non nul à partir d'un certain rang et $v_n/u_n \to k/\ell$

b) Exemples

Ex 4 : (suites classiques)

<u>suite arithmétique :</u> $u_{n+1}=u_n+a$, $a\in\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$.
Alors $u_n = u_0+n.a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow a=0$.

<u>suite géométrique :</u> $u_{n+1}=qu_n$, $q\in\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$.
Alors $u_n=q^n.u_0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |q|<1$ et dans ce cas $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>suite homographique :</u> Soient $a,b,c,d\in\mathbb{K}$ avec $ad-bc\neq 0$ et $f: x\in\mathbb{K}\mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Soit $u_0\in\mathbb{K}$, tant que $u_n\neq 0$ on définit :
$$u_{n+1}=f(u_n).$$
$\to$ Si f a deux points fixes α,β dans $\left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)_n$ est géométrique de raison $\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$
$\to$ Si f a un point fixe α alors $\left(\frac{1}{u_n-\alpha}\right)_n$ est arithmétique de raison : $\frac{c}{a-\alpha c}$

<u>suite récurrente d'ordre $k\in\mathbb{N}^*$:</u> $f:\mathbb{K}^k\to\mathbb{K}$,
$u_{n+k}=f(u_n,u_{n+1},\dots,u_{n+k-1})$ avec $u_0,\dots,u_{k-1}\in\mathbb{K}$.
Si $(u_n)_n$ converge vers $\ell\in\mathbb{K}$ et f est continue en $(\ell,\dots,\ell)$ alors $\ell=f(\ell,\ell,\dots,\ell)$.

Ex 5 : - $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi (suite extraite)
- $a_p\neq 0$, $f(x)=a_px^p+\dots+a_1x+a_0$; $b_p\neq 0$, $g(n)=b_pn^p+\dots+b_1x+b_0$: par opérations algébriques sur les limites : $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{a_p}{b_p}$
- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

App 6 : (Généraliser la notion de somme finie) Notion de somme d'une série numérique.

II Critères de convergence

a) Critère de Cauchy

Rq 7 : Vérifier qu'une suite converge avec la définition 2 requiert de connaître a priori la limite. On cherche donc des critères qui n'exigent pas cette connaissance.

Déf 8 : (Suite de Cauchy) Une suite $(u_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :
$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p,q\geq N, |u_p-u_q|\leq\varepsilon.$$

Rq 9 : (i) Toute suite convergente est de Cauchy
(ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Thm 10 : Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy converge.

Ex 11 : La suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ n'est pas convergente car : $|u_{2n}-u_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

App 12 : Construction de $\mathbb{R}$ depuis $\mathbb{Q}$.

Ex 13 : Les sommes partielles d'une série absolument convergente satisfont le critère de Cauchy.

b) Critères de convergence par comparaison sur $\mathbb{R}$

Prop 13 : (Monotonie) Une suite réelle monotone et bornée converge.

Ex 14 : (Racine p-ième positive) Soit $a, p > 0$ et $x_0 > 0$ tel que $x_0^p > a$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)x_n + a/x_n^{p-1}\right].$$

$(x_n)_n$ est décroissante minorée donc converge. La limite ℓ vérifie $\ell^p = a$.

Ex 15 : Une série à termes positifs converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.
Application : Critères de comparaison de séries à termes positifs

Rq 16 : Les inégalités larges sont préservées par passage à la limite.

Prop 17 : (Théorème d'encadrement) Si trois suites réelles $(u_n),(v_n),(w_n)$ vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n \le w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Ex 18 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$ donc $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Déf 19 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{\infty} u_n - v_n = 0$

Prop 20 : Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Application 21 : Toute série alternée dont les termes tendent vers 0 et décroissent en valeur absolue est convergente.

Ex 22 : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

c) Convergence au sens de Césàro

Déf 23 : Une suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ au sens de Césàro si $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_n$ converge vers ℓ.

Thm 24 : (Césàro) Si $u_n \to \ell$ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell$

Ex 25 : $((-1)^n)_n$ converge au sens de Césàro vers 0.

Thm 26 : (Théorème taubérien de Hardy) Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$. Si $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. DEV 1

App 27 : Soit $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :
(i) si f est continue alors $\|S_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$
(ii) si $f \in L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ $(1 \le p < +\infty)$ alors $\|S_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$
(iii) si $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) =: f(x_0^-)$ et $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) =: f(x_0^+)$ alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$

III) Valeurs d'adhérences

a) Définition

Déf 28 : On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ convergeant vers a.

Ex 29 :
- $(-1)^n$ a $\{-1, 1\}$ comme ensemble de valeurs d'adhérences.
- $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérences.

Prop 30 : Si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy ayant ℓ pour valeur d'adhérence alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Rq 31 : Une suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ a pour seule valeur d'adhérence ℓ.

Rq 32 : La suite de Syracuse d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$: $u_0 = N$ et $u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$
devient périodique dès qu'elle prend la valeur 1. Pour $N \le 2^{62}$ la suite finit par atteindre 1 mais pour N quelconque, la question reste ouverte.

b) Limite inférieure et supérieure

Déf 33 : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On définit la limite supérieure et la limite inférieure de $(u_n)_n$ par :
$\limsup u_n := \inf_{n\ge 0}\left(\sup_{k\ge n}(u_k)\right)$ et $\liminf u_n = \sup_{n\ge 0}\left(\inf_{k\ge n}(u_k)\right)$

App : Critère d'Hadamard pour les séries entières $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$

Ex 34 : $\limsup (-1)^n = 1$; $\liminf (-1)^n = -1$; $\limsup n = \liminf n = +\infty$.

Prop 35 : (i) $\limsup u_n = +\infty \iff (u_n)_n$ non majorée
(ii) $\liminf u_n = +\infty \iff u_n \to +\infty$
(iii) $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$) est la plus grande (resp. petite) valeur

d'adhérence de $(u_n)_n$.

Thm 36 : Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

(i) $\limsup u_n \leq \limsup v_n$

(ii) $\liminf u_n \leq \liminf v_n$

App 37 : (Suites sous-additives) Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que
$$u_{n+p} \leq u_n + u_p \quad , \forall n,p \in \mathbb{N}.$$
Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge vers un réel positif.

Compacité et valeurs d'adhérences

Thm 38 : (Bolzano-Weierstrass) Une partie A de $\mathbb{K}$ est compacte ssi toute suite de points de A admet une valeur d'adhérence.

Corollaire 39 : Une suite de Cauchy à valeurs dans un compact de $\mathbb{K}$ converge.

App 40 : (Heine) Une fonction continue sur un compact de $\mathbb{K}$ est uniformément continue sur ce compact.

IV/ Applications

a) Caractérisations de l'adhérence, des fermés, de la continuité

Prop 41 : Soit A une partie de $\mathbb{K}$. Un élément $x \in \mathbb{K}$ est dans l'adhérence de A ssi il existe une suite de points de A qui converge vers x.

Ex 42 : $c \in \mathbb{K}$, $r > 0$. $\overline{\{x \in \mathbb{K}, |x-c| < r\}} = \{x \in \mathbb{K}, |x-c| \leq r\}$

Prop 42 : $F \subseteq \mathbb{K}$ est fermée ssi toute suite de points de F convergente converge vers un élément de F.

Prop 43 : $E, F \subseteq \mathbb{K}$. $f : E \to F$ est continue en $a \in E$ ssi toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a est telle que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Rq 44 : La proposition 3 montre que si $f, g : E \to F$ sont continues en $a \in E$, $f+g$, fg le sont aussi par exemple.

b) Approximation numérique par la méthode de Newton

DEVT 2

Thm 45 : (Méthode de Newton)
Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a,b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que $f' \neq 0$. Pour $x_0 \in [a,b]$ on considère :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x}-\varepsilon ; \tilde{x}+\varepsilon]$ la suite $(x_n)_n$ converge vers $\tilde{x}$ et il existe $C > 0$ tel que
$$\forall x_0 \in [\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon], \forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - \tilde{x}| \leq C|x_n - \tilde{x}|^2$$

App 46 : $a, p > 0$, $f(x) = x^p - a$
La suite est celle de l'exemple 14, on obtient une garantie sur la vitesse de convergence.

Réfs : Gourdon, Analyse
FGN, Analyse I
Rouvière, guide de calcul diff
Combes, Suites et séries
BMP, objectif agrég