Leçon 223: Suites numériques, convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

On considère $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$

I - Convergence d'une suite numérique

1) Limite d'une suite

Def 1: On dit que u est convergente s'il existe $l \in K$ tel que
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$
Dans le cas contraire on dit que u est divergente

Ex 2: $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$

Rq 3: u est divergente ne veut pas necessairement dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

Ex 4: Si $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, alors u est divergente mais ne tend pas vers $\pm\infty$

Prop 5: Si u converge alors il existe un unique $l \in K$ vérifiant la définition.
On note $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ou encore $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$

Prop 6: Si u converge alors u est bornée.

Rq 7: La réciproque est fausse.

Ex 8: La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1 mais n'est pas convergente.

Prop 9: L'ensemble des suites convergentes forme un K-algèbre et l'application limite est un morphisme de K-algèbre entre cet ensemble et K. De plus l'inverse d'une suite convergente vers une limite non nulle converge vers l'inverse de la limite (bien définie à partir d'un certain rang)

Prop 10: Le produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 converge vers 0.

Ex 11: La suite $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Prop 12: Caractérisation séquentielle de la continuité: Soit $f: K \to K$ et $l \in K$, f est continue en l si et seulement si $\forall (u_n) \in K^{\mathbb{N}}, u_n \to l \Rightarrow f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$

Ex 13: $f: x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0

2) Particularités du cas réel

Dans cette sous-partie, on prendra $K = \mathbb{R}$

Def 14: On dit que u est minorée (resp. majorée) s'il existe $m \in \mathbb{R}$ (resp. $M \in \mathbb{R}$) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$)

Thm 15: Théorème de la limite monotone: Si u est majorée et croissante (resp. minorée et décroissante) alors u converge et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$)

Ex 16: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ converge.

Thm 17: Théorème des gendarmes": Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $l \in \mathbb{R}$, si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \leq v_n \leq w_n \\ l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n \end{cases}$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$

Ex 18: La suite $(e^{-n}\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Def 19: Deux suites u et v sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim u_n - v_n = 0$

Prop 20: Dans ce cas, u et v converge et ont la même limite.

App 21: Critères des séries alternées: Si u est à termes positifs, décroissante, convergente vers 0 alors $\sum\limits_n (-1)^n u_n$ est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leq u_{n+1}$

Ex 22: Pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

3) Suite de Cauchy

Def 23: On dit que u est de Cauchy si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$,
$$(n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

Prop 24: Si u est convergente alors u est de Cauchy.

Prop 25 : Si u est de Cauchy alors u est bornée

Thm 26 : K est complet i.e : $\forall u \in K^{\mathbb{N}}$, u converge si et seulement si u est de Cauchy

App 27 : Toute série absolument convergente est convergente.

Ex 28 : La serie $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4) Convergence en moyenne de Cesàro

Def 29 : On appelle suite des moyennes de Cesàro la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in K^{\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Prop 30 : Si u converge alors sa suite des moyennes de Cesàro converge également et ont la même limite.

Ex 31 : $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Rq 32 : La réciproque est fausse.

Ex 33 : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne de Cesàro mais est divergente.

Thm 34 : Réciproque partielle de la convergence en moyenne de Cesàro :
Si $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in K$ et u est réelle monotone, alors u converge également vers l.

II Valeurs d'adhérence d'une suite

1) Lien entre valeur d'adhérence, suite extraite et suite convergente

Def 35 : Soit $l \in K$. On dit que l est valeur d'adhérence de u si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in [\![N, +\infty[\![, |u_n - l| \leq \varepsilon$

Def 36 : Une suite extraite de u est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice (ie : strictement croissante)

Prop 37 : Soit $l \in K$. l est valeur d'adhérence de u si et seulement si l est limite d'une suite extraite de u.

Ex 38 : 1 et -1 sont les valeurs d'adherence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop 39 : Si u converge vers l alors toutes ses suites extraites aussi.

Rq 40 : Il ne suffit pas que u admette une suite extraite convergente pour converger

Ex 41 : $u = (n \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet u_{2n} comme suite extraite convergente mais diverge

Cor 42 : Si u converge vers l alors l est l'unique valeur d'adhérence de u.

Rq 43 : La réciproque est fausse (voir Ex 41)

Prop 44 : u converge vers l si et seulement si l est l'unique valeur d'adhérence de u et u est bornée.

Prop 45 : u converge vers l si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.

Thm 46 : Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Si u est bornée alors u admet au moins une valeur d'adhérence $l \in K$.

2) Limites inférieures et supérieures

Prop 47 : Si u est bornée alors les suites $(\inf_{k\geq n} u_k)$ et $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante majorée et décroissante minorée donc elles convergent.

Prop 48 : Si u n'est pas bornée alors $(\inf_{k\geq n} u_k)$ et $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Def 49 : On définit dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\liminf_{n\to\infty}(u_n) := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right)$$

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n) := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} u_k\right)$$

Prop 50 : Si u est minorée (resp. majorée) alors $\liminf_{n\to\infty}(u_n)$ est la borne inférieure (resp. $\limsup(u_n)$ est la borne supérieure) des valeurs d'adhérence de u.

Ex 51 : L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$ et $\limsup_{n\to\infty}(\sin n) = 1 = -\liminf_{n\to\infty}(\sin n)$

Cor 52 : u converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty}(u_n) = \liminf_{n\to\infty}(u_n)$. Dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$

III - Etude de suites particulières

1) Suites récurrentes et exemples linéaires d'ordre 1

Def 53 : Soit $f : K \to K$. On dit que u est une suite récurrente d'ordre 1 si
$$\begin{cases} u_0 \in K \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Prop 54 : Dans le cas réel, si f est croissante alors u est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$.

Cor 55 : Dans le cas réel, si f est décroissante alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens opposés et donnés par les signes de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$.

Prop 56 : Si u converge vers l, alors $l = f(l)$.

Thm 57 : Théorème du point fixe de Picard : Soit $f : K \to K$ k-contractante alors f admet un unique point fixe $l \in K$ et pour toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$, $u_0 \in K$,

- $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$
- $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n - l| \le k^n |u_0 - l|$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n - l| \le \frac{k}{1-k}|u_n - u_{n-1}|$

Thm 58 : Methode de Newton : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a<b$ et $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$. Alors f admet un unique zéro en $l \in [a,b]$. De plus, il existe $I \subset [a,b]$ un intervalle tel que : $\forall x\in I,\ x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in I$ et pour toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Cor 59 : Si de plus, f est supposé convexe, alors l'intervalle $I = [l,b]$ est stable par f et $\forall x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec
$\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \le x_{n+1} - l \le C(x_n - l)^2$
et si $x_0 > l$, $x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} l + \frac{f''(l)}{2f'(l)}(x_n - l)^2$

DEV 1

2) Exemples de suite récurrente d'ordre 1

Def 60 : On dit que u est arithmétique si u est récurrente d'ordre 1 avec $f = id_K + a$, $a \in K$

Prop 61 : Dans ce cas, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = na$ et u converge si et seulement si $a = 0$. Sinon u diverge et $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Def 62 : On dit que u est géométrique si u est récurrente d'ordre 1 avec $f = q\, id_K$, $q\in K$.

Prop 63 : Dans ce cas, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$ et si
- $|q| < 1$ alors u converge vers 0
- $q = 1$ alors u est constante égale à u_0
- $|q| = 1, q \ne 1$, alors u ne converge pas et reste dans $\{z\in K / |z| = |u_0|\}$
- $|q| > 1$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Def 64 : On dit que u est arithmético-géométrique si u est récurrente d'ordre 1 avec $f = q\, id_K + a$, $(q,a) \in K\setminus\{0,1\} \times K\setminus\{0\}$

Prop 65 : Dans ce cas, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = q^n u_0 + a\frac{1-q^n}{1-q}$
Si
- $|q| < 1$ alors u converge vers $\frac{a}{1-q}$
- $|q| = 1$ alors u diverge et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \in \partial B\left(\frac{a}{1-q}, \left|u_0 - \frac{a}{1-q}\right|\right)$
- $|q| > 1$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

3) Suite équirépartie

Def 66 : On dit que u est équirépartie modulo 1 si $\forall (a,b)\in[0,1]^2, a<b \Rightarrow \frac{1}{n}\left|\{k\in[\![1,n]\!], \{u_k\}\in[a,b]\}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a$

Thm 67 : Critère de Weil : les assertions suivantes sont équivalentes :
- i) u est équirépartie modulo 1
- ii) $\forall f : [0,1]\to\mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{u_k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$
- iii) $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

DEV 2

App 68 : Soit $t\in\mathbb{R}$, alors $(nt)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $t \notin \mathbb{Q}$

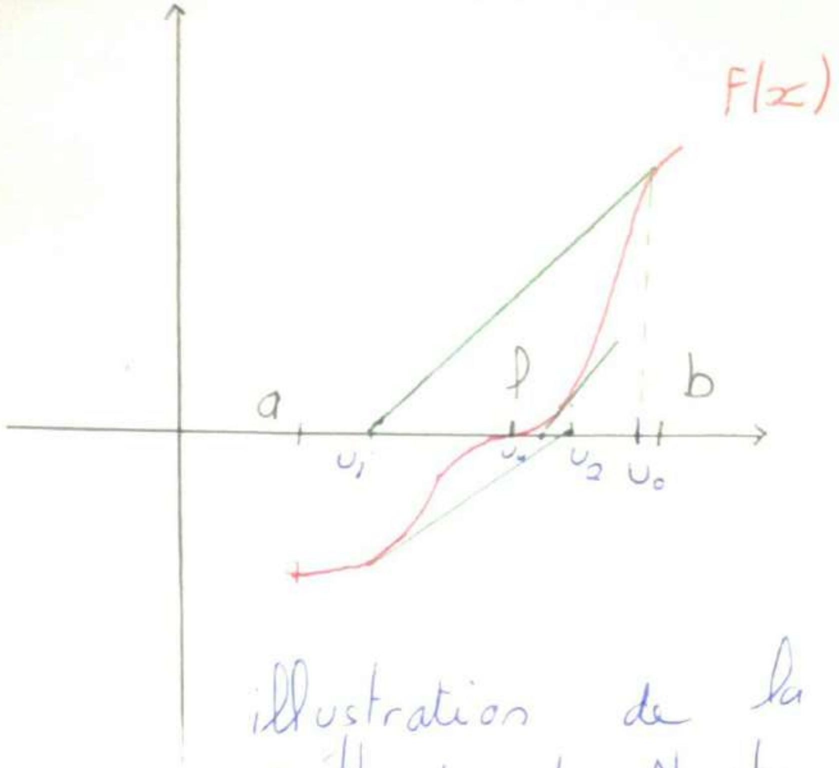
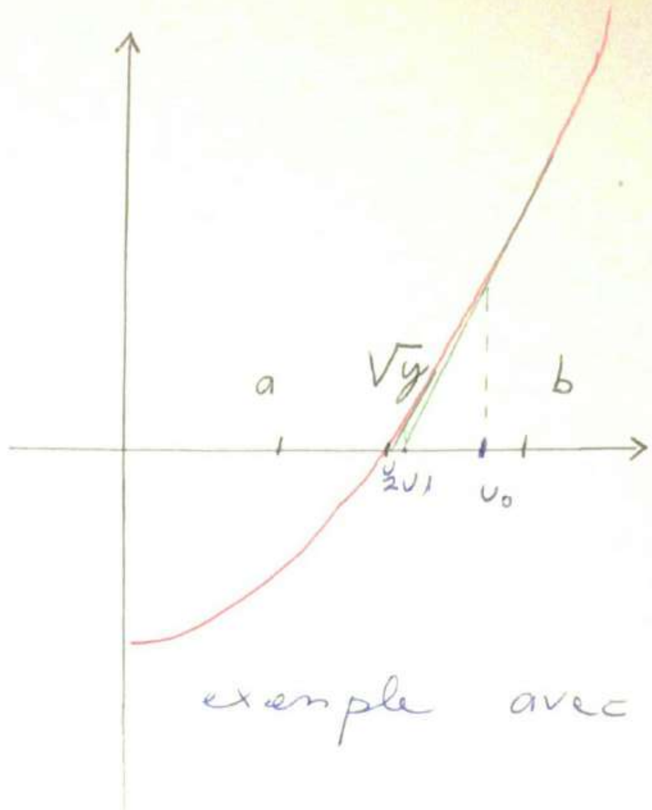


illustration de la méthode de Newton



exemple avec F convexe