Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

I. Généralités

A. Etude de la convergence d'une suite

Comparaison

Théorème des gendarmes. Soient $(u_n), (a_n), (b_n)$ des suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si $a_n \to l$ et $b_n \to l$, alors $u_n \to l$.

Suites de Cauchy

Définition. Une suite numérique (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N, |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Proposition.

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Suites bornées et convergence

Définition. Une sous-suite d'une suite numérique (u_n) est une suite (u_{k_n}) où $n \mapsto k_n$ est strictement croissante.

Définition. Une valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n) est la limite d'une sous-suite de (u_n).

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Proposition. Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition. Une suite bornée est convergente si et seulement si elle admet au plus une valeur d'adhérence.

Suites monotones, suites adjacentes

Théorème. Soit (u_n) une suite réelle.

(i) Si (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente et $\lim u_n = \sup u_n$;
(ii) si (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente et $\lim u_n = \inf u_n$.

Définition. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si

(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
(ii) $\lim u_n - v_n = 0$.

Théorème. Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite l. On a de plus $u_n \leq l \leq v_n$.

B. Relations de comparaison

Définition. On dit qu'une suite numérique u_n est dominée par une suite positive α_n et on note $u_n = O(\alpha_n)$ s'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$N \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq A\alpha_n, \forall n \in \cancel{\mathbb{N}}.$$

Définition. On dit qu'une suite numérique est négligeable devant une suite positive α_n et on note $u_n = o(\alpha_n)$ si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \epsilon \alpha_n$.

Exemple. $\frac{1}{n^k} = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right), k \geq 1.$

Définition. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(|v_n|)$.

Exemple. $n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ces notations permettent de préciser le comportement asymptotique d'une suite à l'aide de suites de références, comme les suites géométriques, les suites $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ …

II. Rapidité de convergence

Dans cette partie, on considère une suite u_n de réels ou de complexes telle que $\lim u_n = l$, et on cherche à préciser la vitesse de convergence de u_n vers l. En considérant $|u_n - l|$, on peut se ramener à l'étude d'une suite positive convergeant vers 0.

A. Définitions

Définition. On dit que (u_n) converge géométriquement vers 0 si $u_n = O(k^n)$ pour un $k \in]0,1[$. On dit que la convergence est géométrique d'ordre k.

Exemple : estimation des grands écarts (DEV). Si (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de Bernoulli de paramètre p, et $S_n = \sum_1^n X_n$, alors $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| > \epsilon)$ converge géométriquement vers 0.

Théorème. Si (u_n) est une suite de réels > 0. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $k \in]0,1[$, alors u_n converge géométriquement d'ordre $k+\epsilon$ vers 0 pour tout $\epsilon > 0$ tel que $k + \epsilon \in]0,1[$.

Proposition. Une suite (u_n) de réels > 0 converge si et seulement si $\limsup\,(u_n)^{1/n} < 1$.

Définition. Une suite de réels positifs (u_n) converge lentement si u_n converge vers 0 et si $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ pour un $\alpha > 0$.

Exemple. La suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in]0;\pi/2]$ converge lentement vers 0 : on a $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Définition. On dit que (u_n) a une convergence quadratique vers 0 si $u_n = O(k^{2^n})$.

B. Cas des suites récurrentes

On considère une fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et on suppose $f(I) \subset I$. On considère une suite définie par

- $u_0 \in \mathbb{R}$;
- $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème du point fixe. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soit $f : I \to I$ une application contractante, alors f admet un unique point fixe, qui est attractif.

Application. Supposons f contractante de rapport k. Alors u_n converge géométriquement vers le point fixe de f.

Exemple. Un cas important est le cas où f est de classe C^1 et admet un point fixe x_0 vérifiant $f'(x_0) < 1$. Dans ce cas, pour u_0 suffisamment proche de x_0, u_n converge géométriquement vers x_0.

Exemple. Si f est de classe C^1 et admet un point fixe x_0 vérifiant $f'(x_0) = 0$, alors pour u_0 suffisamment proche de x_0, u_n converge de manière quadratique vers x_0.

C. Accélération de la convergence

Méthode de Romberg-Richardson

On applique cette méthode lorsqu'une suite u_n converge géométriquement de rapport $k < 1$ et qu'on connaît k.

Théorème. On suppose que $u_n = l + \lambda k^n + O(k'^n)$. $\lambda \in \mathbb{R}$, $|k'| < |k| < 1$. Alors si on pose

$$u_n' = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k}.$$

Alors u_n' converge géométriquement, d'ordre au moins k' vers l.

Exemple : approximation de π.

On a $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$ qui converge vers π. On a de plus

$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6}\frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{16^n}\right)$. On peut donc appliquer la méthode pour approcher plus rapidement π avec $k = 1/4$.

Méthode d'Aitken

Théorème. On suppose que $u_n = l + \lambda k^n + O(k'^n)$. Si on pose $c_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n - u_{n-1}}$ et $u_n' = \frac{u_{n+1}-c_n u_n}{1-c_n}$ alors u_n' converge vers l géométriquement de rapport k'.

III. Applications

A. Calculs approchés d'intégrales

On cherche à accélérer la méthode des trapèzes de calcul approché d'intégrales : étant donné $f \in C^\infty([\alpha,\beta])$, on a, pour une subdivision en sous-intervalles égaux $x_j = \alpha + jh, 0 \leq j \leq l$ et $h = \frac{\beta-\alpha}{l}$.

$$T_f(h) = h\left(\frac{1}{2}f(\alpha) + f(\alpha+h) + \cdots + f(\beta-h) + \frac{1}{2}f(\beta)\right).$$

On va essayer d'utiliser la méthode de Romberg-Richardson à $u_n = T_f\left(\frac{\alpha-\beta}{2^n}\right)$.

Proposition. On a

$$T_f(h) = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \sum_{m=1}^{k-1} a_m h^{2m} + O(h^{2k}).$$

On peut donc itérer la méthode d'accélération pour accélerer la convergence et obtenir une approximation $A_{m,n} = \int f(x)dx + O(4^{-m(n+1)})$ où $A_{m,n}$ est défini par récurrence et calculé par programmation dynamique :

$$A_{m,n} = \frac{4^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{4^n - 1}.$$

B. Résolution d'équations : méthode de Newton

On cherche à trouver une racine a d'une équation $f(x) = 0$, où $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ est de classe C^2.

Pour cela, on pose $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et on considère la suite $x_0 \in [c,d]$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

Théorème (DEV).

(i) Il existe une intervalle $J \subset [c,d]$ d'intérieur non vide tel que la suite converge pour $x_0 \in J$. La convergence est quadratique ;

(ii) si de plus $f''(x) > 0, \forall x \in [c,d]$ la suite converge pour $x_0 \in [a,d]$, où a vérifie $f(a) = 0$. On a dans ce cas $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f(a)}(x_n - a)^2$ si $x_0 > a$.

Demailly Analyse numériq et équat° diff.

El Amrani Suites et séries numériques. Suites et Séries de fonctions

Oraux X-ENS Analyse 1.