224

Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

## I. Convergence et notation de Landau

### A) Convergence

**Déf 1** : Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $u$ converge s'il existe $l \in \mathbb{C}$ / $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l$

- Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que $u$ tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si $\forall A > 0, \exists N_A, n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$

**Thm 1** (Bolzano-Weierstrass). Soit $K$ un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $u \in K^{\mathbb{N}}$. Alors $\exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \nearrow$ / $u_{\varphi(n)}$ converge.

**Déf 2** : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $x \in \bar{I}$. On dit que $f$ tend vers $l$ en $x$ ($l \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) si : $\forall u \in I^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$. On notera $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} l$

**Thm 2** (Gendarmes). Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ / $\forall x \in I$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\exists l, x_0$ / $g(x) \xrightarrow[x_0]{} l$, $h(x) \xrightarrow[x_0]{} l$. Alors $f$ admet une limite en $x_0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$.

**Application 1** (Séries alternées) Soit $a \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ décroissante / $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, car les suites $S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$ et $S_{2n+1}$ sont adjacentes.

### B) Notations de Landau et Hardy

**Déf 3** Soient $f, g : I \to E$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Alors, pour $x \in \bar{I}$, on note $f = O_x(g)$ ssi $\exists C > 0$, $U \in \mathcal{U}(x)$ / $\forall y \in U$, $\|f(y)\| \leq C\|g(y)\|$. On note encore $f \underset{x}{\preccurlyeq} g$

**Déf 4** : $f = o_x(g)$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{U}(x)$ / $y \in U \Rightarrow \|f(y)\| \leq \varepsilon \|g(y)\|$. On note encore $f \underset{x}{\prec} g$.

**Déf 5** $f \underset{x}{\sim} g$ ssi $f - g = o_x(g)$

**Rem** : si $g$ ne s'annule pas :

$$\begin{cases} f = o_x(g) \Leftrightarrow \dfrac{f(y)}{g(y)} \xrightarrow[y \to x]{} 0 \\ f \sim g \Leftrightarrow \dfrac{f(y)}{g(y)} \xrightarrow[y \to x]{} 1 \end{cases}$$

### C) Echelles de comparaison

**Déf 6** Soit $X$ un espace métrique et $x_0 \in X$. Une échelle de comparaison est un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies sur un voisinage de $x_0$ (éventuellement exclus) tel que $\forall f, g \in \mathcal{E}$, $(f = o_{x_0}(g))$ ou $(g = o_{x_0}(f))$ ou $(g = f)$

**Ex** : pour $x_0 = +\infty$, $\mathcal{E}_1 = \{f_{\alpha,\beta} : x \mapsto x^\alpha \ln(x)^\beta \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

On a $f_{\alpha,\beta} \underset{+\infty}{\prec} f_{\alpha',\beta'} \Leftrightarrow (\alpha < \alpha')$ ou $(\alpha = \alpha', \beta < \beta')$

**Déf 7** (Développement asymptotique : DAS) Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle DAS à $k$ termes de $f$ en $x_0$ par rapport à l'échelle $\mathcal{E}$ une expression de la forme

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) + o_{x_0}(f_k(x))$$ où :

(i) $(\alpha_i)_{i \in [\![1,k]\!]} \in \mathbb{C}^k$

(ii) $f_{i+1} = o_{x_0}(f_i)$ $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$

**Ex** pour $f : x \mapsto 3x^2 \ln(4x) + \frac{1}{x}$ et l'échelle $\mathcal{E}_1$ on a

$$f(x) = 3(x^2 \ln(x)) + 3\ln(4)\, x^2 + o(x^2)$$

**Déf 8** (Développement limité : DL) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On appelle DL de $f$ en $a$ un DAS de $f$ en $a$ avec pour échelle $\{x \mapsto (x-a)^k, k \in \mathbb{N}\}$

**Prop** (Développement de Taylor) si $f$ est $n$ fois dérivable en $a$, elle y admet un DL à l'ordre $n$

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n)$

La réciproque est fausse.

Contre-Exemple : $f: x\mapsto x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ admet un D.L en 0 à l'ordre 2 : $f(x)=o_0(x^2)$, mais n'est pas 2 fois dérivable.

## D L'algèbre des fonctions admettant un DAS.

Un D.A.S étant connu pour $f$ et $g$, il est possible d'en déduire un pour $\alpha f$, $f+g$, $fg$, $\frac{1}{f}$, en utilisant que pour $f_i, f_j \in \mathcal{E}$,

- $o(f_i)\,o(f_j)=o(f_if_j)$
- $o(f_i+f_j)=o(f_i)$ si $f_j \ll f_i$
  $=o(f_i)$ si $f_i=f_j$.

Rem : les deux conditions précédentes sont exhaustives dans le cadre d'une échelle de comparaison.

Contre-ex : $x\mapsto x\sin(x)$ et $x\mapsto 1$ ne sont pas comparables en $+\infty$.

## E D.A.S usuels

$\forall n\in\mathbb{N}$, • $\exp(x)=\sum^{n}\frac{x^k}{k!}+o_0(x^n)$ (Devpt de Taylor)

- $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ avec $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-k)}{k!}$

Application : $\frac{x}{\exp(x)-1}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

## F D.A.S de fonctions réciproques

Un D.A.S étant connu pour $f$, il est parfois possible d'en déduire un pour $f^{-1}$.

Ex : $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $\arcsin(x)=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$

On a alors

$x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)-\frac{\alpha^3x^3}{6}$ d'où $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta-\frac{\alpha^3}{6}=0\end{cases}$

Donc $\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)$

# II Développement asymptotiques de Suites

## A Comparaison série-intégrale.

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ décroissante et $U$ défini par $U_n=\sum_{k=0}^{n}f(k)-\int_0^n f(t)dt$. Alors $U$ est convergente.

Application $\exists\gamma\in\mathbb{R}\,/\,\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1)}$

## B Moyenne de Césaro

Soit $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\,/\,\exists l\in\mathbb{C},\ a_n\xrightarrow[n\infty]{}l$. On définit $b_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}$. Alors $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}l$

Application soit $u$ la suite définie par $\begin{cases}u_0>0\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}\end{cases}$

Alors $u_n\nearrow$ et $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. De plus $u_{n+1}^2=u_n^2+2+o(1)$

Donc $\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}^2-u_k^2\underset{n\to+\infty}{\sim}2n$ i.e $u_n^2\sim 2n$, ou encore $\boxed{u_n\sim\sqrt{2n}}$

## C Méthode de Newton

Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2$, $f(c)<0<f(d)$ Alors $\exists!a\in]c,d[\,/\,f(a)=0$. On définit $F:x\mapsto x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors la suite définie par $\begin{cases}x_0\in[c,d]\\ x_{n+1}=F(x_n)\end{cases}$ satisfait

$|x_n-a|\leq C\,k^{2^n}$ avec $|k|<1$.

## D Méthode d'Aitken $\boxed{\text{(DEV)}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,/\,\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $x_n\xrightarrow[+\infty]{}\alpha$ et $x_n\neq\alpha\ \forall n$.

On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{R}\,/\,|k|<1$ et $\varepsilon_n\to 0\,/$ $x_{n+1}-\alpha=(k+\varepsilon_n)(x_n-\alpha)$.

En posant $y_n=x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$

On obtient $y_n-\alpha=o_{+\infty}(x_n-\alpha)$

## E) Utilisation d'une série entière.

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ / $a_1 \wedge \dots \wedge a_k = 1$. Notons $u_n = \mathrm{Card}\left(\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \;/\; \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\right\}\right)$

En considérant $f_i : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^{a_i}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{n a_i}$ (rayon de convergence $= 1$)

on observe que : $\prod_{i=1}^{k} f_i(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$

Ce qui permet d'affirmer $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a_1 \dots a_k} \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}}$

## F) Théorème des nombres premiers.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\pi(n) = \mathrm{Card}(⟦1,n⟧ \cap \mathcal{P})$.

On a alors $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$

# III Développements asymptotiques de fonctions.

## A) Suites équiréparties. $\boxed{\text{DÉV}}$

Critère de Weyl soit $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$.

$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a,b) = \mathrm{Card}\left(\{k \in ⟦1,n⟧ / u_k \in [a,b]\}\right)$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dfrac{X_n(a,b)}{n} \to b-a \quad \forall a \leq b$

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ / $f(0) = f(1)$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$

## B) Ergodicité du billard carré

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ / $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+1,y) = f(x,y+1) = f(x,y)$. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :

on a $\lim_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T} \int_0^T f(t, \alpha t + b)\,dt = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$

Application : si on lâche une bille sur un billard carré avec une pente $\alpha \notin \mathbb{Q}$, que la bille vérifie les lois de Descartes, alors $\forall F \in \mathcal{B}([0,1]^2)$, en notant $A(T)$ le temps passé par la bille en $F$ entre les instants $0$ et $T$, on a :

$$\boxed{A(T) \underset{T\to+\infty}{\sim} \mu(F)\,T}$$

## C) Méthode de Laplace.

Soient $a < b$ (éventuellement infinis), $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b[, \mathbb{R})$ et $f : [a,b[ \to \mathbb{C}$ / $e^{-t_0\varphi} f \in L^1$ pour au moins un $t_0 \in \mathbb{R}$.

Si
- $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$
- $\varphi'(a) = 0$ $\quad f(a) \neq 0$
- $\varphi''(a) > 0$

Alors $F$ définie par $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$

vérifie $F(t) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varphi''(a)}} \dfrac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}} f(a)$

Application : en utilisant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\,dx$, on déduit la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$