224 — Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

[GOU] p.11

Cadre : on considère E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et (X,d) un espace métrique.

I) COMPARAISON des SUITES et des FONCTIONS

1) Notations de Landau et de Hardy

Def 1 : Soit $D \subset X$ et $a \in X$. On dit que a est un point d'accumulation de D si, pour tout voisinage V de a, on a $V \cap D \neq \emptyset$ et $V \cap X \neq \{a\}$. On $\mathcal{V}(a)$ les voisinages de a.

[GOU] p.86

Def 2 : Soit $x_0 \in X$ un point d'accumulation de $D \subset X$ et f, g fonctions de D dans E. On dit que :

- f est dominée par g au voisinage de x_0 si : $\exists C > 0$ $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$, $\|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$. On note alors $\boxed{f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x))}$ (ou $f \underset{x_0}{=} O(g)$) (Landau) et $f \underset{x_0}{\preceq} g$ (Hardy)
- f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$, $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$. On note $\boxed{f \underset{x_0}{=} o(g)}$ et $f \underset{x_0}{\lll} g$.
- f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si : $\boxed{f - g \underset{x_0}{=} o(g)}$. On note alors $f \sim_{x_0} g$

Rmq 3 - Ce sont des abus de notations, on devrait écrire $f \in O(g)$
- La notion "d'équivalent" n'est pas compatible avec la somme : $x + 2 \sim_{\infty} x + 1$, $-x \sim_{\infty} -x$ mais $2 \not\sim_{\infty} 1$

Prop 4 : L'équivalent est compatible avec le produit et la puissance dans le cas de la dimension 1 :

$f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2 \Rightarrow f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $f_1^\alpha \sim_{x_0} f_2^\alpha$

Rmq 5 : Dans le cas des suites $E^{\mathbb{N}}$, on prend "$X = \mathbb{N}$" et "$x_0 = \infty$"

[ROM] p.203

Prop 6 : (comparaison des o, O)

Pour $f, \tilde{f}, g, h$, définies $V \in \mathcal{V}(x_0)$ éventuellement privé de x_0, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

i) $\left(f \underset{x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0\right)$ et $\left(f \underset{x_0}{=} O(1) \Leftrightarrow f \text{ bornée près de } x_0\right)$

ii) $f \underset{x_0}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} O(g)$

iii) $\left(f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{=} O(h)\right) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} o(h)$

iv) $\left(f \underset{x_0}{=} O(g) \text{ et } g \underset{x_0}{=} o(h)\right) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} o(h)$

v) si $\left(f \underset{x_0}{=} \left| \begin{matrix} O(g) \\ o(g) \end{matrix} \right. \text{ et } \tilde{f} \underset{x_0}{=} \left| \begin{matrix} O(g) \\ o(g) \end{matrix} \right. \right) \Rightarrow \lambda f + \mu \tilde{f} \underset{x_0}{=} \left| \begin{matrix} O(g) \\ o(g) \end{matrix} \right.$

vi) $\left(f \underset{x_0}{=} O(g) \text{ et } \tilde{f} \underset{x_0}{=} o(h)\right) \Rightarrow f\tilde{f} \underset{x_0}{=} o(gh)$

Thm 7 : (critères)

Lorsque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a :

- $f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et $f \underset{x_0}{=} O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ bornée près de x_0
- $f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \|f(x)\| \cdot \|g(x)\|^{-1} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

Ex 8 : pour tous réels α, β, γ strictement positifs, on a : $\ln(x)^\alpha \underset{\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{\infty}{=} o(e^{\gamma x})$

Prop 9 : Si g et h sont à valeurs strictement positives près de x_0 :

i) $f \sim_{x_0} g$ et $\tilde{f} \sim_{x_0} h \Rightarrow f + \tilde{f} \sim_{x_0} g + h$

ii) $f \sim_{x_0} g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\} \Rightarrow \ln(f) \sim_{x_0} \ln(g)$

iii) $\exp(f) \sim_{x_0} \exp(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

C-ex 10 :

i) sans la positivité : $1 + x \sim_0 1 + x^2$, $-1 \sim_0 -1$ mais $x \not\sim_0 x^2$

ii) sans la limite : $1 + x \sim_0 1$ mais $\ln(1+x) \not\sim_0 0$

iii) ———— : $x^2 + x \sim_{\infty} x^2$ mais $e^{x^2+x} \not\sim_{\infty} e^{x^2}$

2) Développement limité

[ROM] p.206

On se place sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non réduit à un singleton. Soit $a \in \overline{I}$ et $f : I \to E$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Def 11 : On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, notée "$f \in DL_n(a)$", s'il existe P fonction polynomiale à coefficients dans E de degré n tq :

$$\forall x \in I \quad \boxed{f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)}$$

Ex 12 :

- une fonction polynomiale admet un DL de tout ordre en tout point
- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Thm 13 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors il est unique

Coro 14 : si I est centré en 0 et f est une fonction paire / impaire admettant un $DL_n(0)$, alors sa fonction P associée dans le DL est de même parité.

Thm 15 : i) f est continue (ou se prolonge par continuité) en a
$\Leftrightarrow$ elle admet un $DL_0(a)$

ii) f est dérivable (——— en une fonction dérivable) en a
$\Leftrightarrow$ elle admet un $DL_1(a)$

C-ex 16 : cela ne fonctionne plus pour les ordres ≥ 2 :
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}$ admet un $DL_2(0)$ mais n'a pas de dérivée seconde en 0.

Thm 17 : (TAYLOR-YOUNG)

Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, elle admet un $DL_n(a)$ sur un voisinage de a : $\boxed{f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o((x-a)^n)}$

Ex 18 : DL classiques

- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ • $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ (paire)
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

Appli 19 : Les DL permettent de trouver les dérivées successives :
$\hookrightarrow f(x) = \cos(\sqrt{x}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} + o(x^n) \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

[GOU] p88

Prop 20 : (Opérations sur les DL)

i) Soit $f : I \to E$ dérivable tq $f' \in DL_n(a)$. Alors $f \in DL_{n+1}(a)$

ii) Soit $f : I \to E$ tq f est $n \geq 2$ fois dérivable avec un $DL_n(a)$. Alors f' admet un $DL_{n-1}(a)$.

iii) Soit $f, g : I \to E$ ayant un $DL_n(a)$ au voisinage de a. Alors
- $f+g$ admet un $DL_n(a)$
- si E est une algèbre normée, fg admet un $DL_n(a)$
- si $E = \mathbb{K}$ et $g(a) \neq 0$, f/g admet un $DL_n(a)$.

iv) Soit $g : I \to \mathbb{R} \in DL_n(0)$ et $f : J \to E$ où $g(I) \subset J \subset \mathbb{R}$ tq $f \in DL_n(g(0))$ alors $f \circ g \in DL_n(0)$.

Ex 21 : • $\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$
• $(x \mapsto \ln(1+x))' = (1+x)^{-1} \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
• $\tan(x) = \sin(x)(\cos(x))^{-1} \Rightarrow \tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$

③ Echelle de comparaison

[GOU] p86

Def 23 : Soit (X,d) métrique et $x_0 \in X$. On appelle <u>échelle de comparaison au voisinage de x_0</u> un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 (éventuellement privé de x_0) et vérifiant :
- $\forall f \in \mathcal{E}, \forall V \in \mathcal{V}(x_0) \quad \exists x \in V \setminus \{x_0\}$ tq $f(x) \neq 0$
- $\forall g, f \in \mathcal{E}, \quad f = g$ ou $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $g \underset{x_0}{=} o(f)$

Ex 24 : • $\mathcal{E} = \{(x-a)^k, k \in \mathbb{N}\}$ près de $a \in \mathbb{R}$ • $\mathcal{E} = \{|x|^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ près de $\pm\infty$ ou 0
• $\mathcal{E} = \{x^\alpha e^{\beta x} \ln^\gamma(x), (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\}$ près de $+\infty$

Def 25 : Soit $f : D \subset X \to E$ et $x_0 \in X$ point d'accumulation de D. On appelle développement asymptotique de f à k termes par rapport à une échelle $\mathcal{E}$ toute expression de la forme : $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$
où : i) $c_1, \dots, c_k \in E$ sont des constantes
ii) $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$ et $f_{i+1} \underset{x_0}{=} o(f_i) \quad \forall i$
iii) $f \underset{x_0}{=} c_1 f_1 + \dots + c_k f_k + o(f_k)$

Ex 26 : pour $x > 0$ tendant vers l'infini : $x^{1/x} = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(x)}{x^2} + o\left(\frac{\ln^2(x)}{x^2}\right)$

[AF] p299

Prop 27 : de même que pour les DL, on a les opérations suivantes pour les développements asymptotiques : troncature, somme, produit et composition (lorsque $\mathcal{E}$ est stable par produit).

II) DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE de FONCTIONS

[GOU] p159

① utilisation des intégrales

Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq \infty)$ et E un $\mathbb{R}$-espace de Banach.
Soit $f : [a, b[\to E$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ continues par morceaux.

Thm 28 : - si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors : $f \underset{x \to b^-}{\sim} g \Rightarrow \int_a^x f(t)dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)dt$
- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors : $f \underset{x \to b^-}{\sim} g \Rightarrow \int_x^b f(t)dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)dt$

Rmq 29 : on a les même implications pour o et O.

Ex 30 : $\frac{1}{x} \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ donc $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \underset{\infty}{=} o\left(\int_1^x t^{\alpha-1} dt\right) \underset{\infty}{=} o(x^\alpha), \forall \alpha > 0$

② méthode de Laplace

[GOU] p160

Soit $I(t) = \int_a^b g(x) e^{t h(x)} dx$ pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et g, h de classe C^2 sur $]a, b[$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses :

1) $C := \int_a^b |g(x)| e^{h(x)} dx < \infty$

DVP 1

2) h' ne change pas de signe sauf en un seul point $c\in]a,b[$ où h atteint son maximum.
3) $g(c)\neq 0$ et $h''(c)<0$

Alors $I(t) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, g(c) \dfrac{e^{th(c)}}{\sqrt{-h''(c)t}}$

Appli 31 : formule de Stirling
on a $\Gamma(x+1) \underset{\infty}{\sim} x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{-x}$ et pour $x=n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1)=n!$
d'où $n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$

[Z-Q] p404

3) nombre de zéro d'une solution d'équation différentielle
Soit $a\in\mathbb{R}$ et $q\in C^1([a,\infty[)$. On suppose que $q>0$ et que $\int_a^\infty \sqrt{q(u)}\,du=+\infty$ avec $q'=_\infty o(q^{3/2})$. Soit y solution réelle non nulle de (E) : $y''+q.y=0$ sur $[a,+\infty[$.
On a alors $N(x):=\#\{t\in[a,x] \mid y(t)=0\} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$

C-ex 32 : pour $a=1$ et $q(x)=\dfrac{1}{4x^2}$ on a bien $\int_1^\infty \sqrt{q(u)}\,du=\infty$ mais $q'(x)\,q^{-3/2}(x)=-4$. La solution générale est $y(x)=\sqrt{x}(a+b\ln(x))$ qui a au plus 1 zéro sur $[1,+\infty[$.

III DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE de SUITES

[ROM] p216

1) comparaison série-intégrale

Thm 33 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n\sim v_n$. Alors :
- $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ aussi et $\sum_{k\geq n} u_k \sim \sum_{k\geq n} v_n$
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ aussi et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_n$

C-ex 34 : sans la positivité
$u_n=(-1)^n\times\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+w_n$ avec $|w_n|\leq \lambda\, n^{-3/2}$. Alors $\sum u_n$ est divergente mais $u_n\sim\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série alternée convergente.

[GOU] p204

Thm 35 (comparaison série-intégrale)
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonction continue par morceaux, décroissante. Alors la suite $U_n:=\sum_{k=0}^n f(k)-\int_0^n f(t)dt$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^\infty f(t)dt$ sont de même nature.

Ex 36 : série de Bertrand $S:=\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n^\alpha}\ln(n)^{-\beta}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
Alors : S converge $\Leftrightarrow \alpha>1$ ou $\alpha=1$ et $\beta>1$

Appli 37 : Soit γ la constante d'Euler et $H_n:=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$ $(n\geq 1)$
Alors $H_n=\ln(n)+\gamma+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{12n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand $n\to\infty$

DVP 2

Csq 38 : on a $\sum_{k=1}^\infty \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2)$

2) Moyenne de Cesaró

[HAU] p104

Thm 39 : (Cesaró) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ suite réelle qui converge vers $l\in\mathbb{R}$. Soit $y_n:=\dfrac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$, $n\geq 1$. Alors $y_n\to l$.

Rmq 40 : réciproque fausse
pour $x_n:=(-1)^n$ alors $y_n=\sum_{k=1}^n\dfrac{(-1)^k}{k}$ converge vers $\ln(2)$ mais $(x_n)_n$ non

[ROM] p221

Appli 41 : Soit $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ continue tq $f(x)=_0 x-\alpha x^{p+1}+\beta x^{2p+1}+o(x^{2p+1})$ avec $\alpha>0$, >0 et $\beta\neq 0$. Alors la suite $x_{n+1}:=f(x_n)$ (quand elle a du sens) vérifie $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[p]{np\alpha}}-\dfrac{\gamma}{(p\alpha)^{2+\frac{1}{p}}}\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt[p]{n}}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt[p]{n}}\right)$
où γ dépend de α,β,p.

3) Autres méthodes

[ROU] p140

- méthode de Newton : Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tq $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ tq $f'(x)>0$ et $f''(x)>0$ $\forall x\in[c,d]$
Soit $x_{n+1}=F(x_n)$, $n\geq 0$ où $F(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
Alors $x_{n+1}\to a$ où a est l'unique zéro de f et
$$x_{n+1}-a\sim\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2 \text{ si } n\to\infty$$

[CH] p203

- méthode d'Aitken :
Soit $(x_n)_n$ suite réelle qui converge vers $\xi\in\mathbb{R}$ tq il existe $k\in\mathbb{R}$, $|k|<1$ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ tendant vers 0 tq :
$\forall n\geq 0$ $x_n\neq\xi$ et $x_{n+1}-\xi=(k+\varepsilon_n)(x_n-\xi)$
Alors la suite $y_n:=x_n-\dfrac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$ converge plus vite vers ξ de x_n :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-\xi}{x_n-\xi}=0$$

- méthode de Steffensen :
Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x_{n+1}:=f(x_n)$ qui converge vers 0 point fixe de f répulsif, ie $|f'(0)|>1$. Alors pour x_0 assez proche de 0, la suite $x_{n+1}=x_n-\dfrac{(f(x_n)-x_n)^2}{f(f(x_n))-2f(x_n)+x_n}$ converge plus vite que toute suite c^n $(c<1)$ vers 0.

DVP

<u>Ref</u>: [GOU]: Gourdon *analyse*

[ROM]: Rombaldi, *éléments d'analyse réelle*

[HAU]: Hauchecorne, *les contres-exemples en mathématiques*

[Z-Q]: Zuily-Queffélec, *cours d'analyse*

[AF]: Armandiès-Ferrard, *cours d'analyse 2*

[CH]: Chambert-Loir, *exercice d'analyse 2*

[ROU]: Rouvière, *petit guide de calcul différentiel*

[p 203-204]

Développement asymptotique de la série harmonique

Si γ désigne la constante d'Euler, on a le développement asymptotique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [n \to +\infty]$$

<u>Preuve</u> : On va montrer que

1) $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad [n \to +\infty]$

2) Pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad [n \to +\infty]$

3) $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [n \to +\infty]$

1) On applique le <u>théorème de comparaison série - intégrale</u> à la fonction $f : \frac{1}{1+x}$ (fonction positive, continue et décroissante sur $[0, +\infty[$)

La suite (U_n) définie par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_0^{n-1} f(t)\,dt = H_n - \ln(n)$$

converge.

En notant γ la limite de (U_n), on obtient :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad [n \to +\infty]$$

2) Si $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$, si bien que pour $k \geq 2$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant cela entre n et N, puis en faisant tendre N vers l'infini, on obtient :

$$\underbrace{\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}}_{= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \underbrace{\int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}}_{= \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}}$$

Comme les membres de gauche et de droite sont tous deux équivalents à $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ quand $n \to +\infty$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad [n \to +\infty]$$

3) Posons pour $n \geqslant 1$, $u_n = H_n - \ln(n) - \gamma$

On emploie une méthode classique, pour obtenir un équivalent de à chercher un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, puis à "sommer" l'équivalent obtenu.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [n \to +\infty]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right) - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

soit $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

$\Rightarrow$ La série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ CV

D'autre part $\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = -u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2n^2}$

(th. relatif aux équivalents des restes)

où $\sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ (formule avec $\alpha = 2$)

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

On obtient donc $\underline{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

De même, on pose $w_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$ pour $n \geqslant 1$, suite qui converge vers 0.

La somme $\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k)$ vaut $-w_k$

et son terme général vaut $w_{k+1} - w_k = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}$

$$w_{k+1} - w_k = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\ } + o\left(\frac{1}{\ }\right)$$

d'où $-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$

d'où $\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Application : Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

En considérant les entiers pairs et impairs, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= -\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) + \ln(2n) + \gamma + o(1) \\
&= \ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

La série alternée $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ étant convergente, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

(Rque : $\gamma = 0{,}57721564\ldots$)

Méthode de Laplace

[GOU - Analyse p 160]
[Pearson L2 - p 372]

Nous allons donner un résultat particulier sur les équivalents d'intégrales dont l'intégrande dépend d'un paramètre, qui s'applique aux intégrales de la forme $I(t) = \int_a^b g(x) e^{th(x)} dx$ lorsque $t \to +\infty$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$

Théorème (Méthode de Laplace)

Soient g et h deux fonctions réelles de classe C^2 sur $]a,b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) telles que :

1) $C = \int_a^b |g(x)| e^{h(x)} dx < +\infty$

2) h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in]a,b[$ où h atteint son maximum

3) $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$

alors $I(t) = \int_a^b g(x) e^{th(x)} dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\, g(c) e^{th(c)} \sqrt{\dfrac{2}{-t h''(c)}}$

Preuve :

1) Résultat préliminaire :

Si c est une constante > 0 et pour tout $b > 0$ fixé (éventuellement $+\infty$) :

$$J(t) = \int_{-b}^{b} e^{-ctu^2} du = 2\int_0^b e^{-ctu^2} du \underset{x^2 = ctu^2}{=} \frac{2}{\sqrt{ct}} \underbrace{\int_0^{b\sqrt{ct}} e^{-x^2} dx}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\boxed{\text{ie } J(t) = \int_{-b}^{b} e^{-ctu^2} du \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{ct}}}$$

2) Multipliant par $\dfrac{e^{-th(c)}}{g(c)}$, on peut déjà supposer $h(c) = 0$ et $g(c) = 1$

Posons d'abord pour simplifier l'écriture $\varphi(t) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{-t h''(c)}}$

L'intégrale $I(t)$ va se décomposer en 2 parties : une "partie principale" où l'on intègre près de c et le "reste".

(i) "Etude" au voisinage de c :

$$h(x) = \underbrace{h(c)}_{=0} + \underbrace{h'(c)}_{=0}(x-c) + \frac{(x-c)^2}{2} h''(c) + o(x-c)^2$$

Ie $h(x) = \frac{(x-c)^2}{2} h''(c) + o(x-c)^2$ et $g(c) = 1$ (par hypothèse)

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ $\quad \exists \delta > 0 \quad |x-c| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 1-\varepsilon \leq g(x) \leq 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \leq \dfrac{h(x)}{\frac{(x-c)^2}{2} h''(c)} \leq 1+\varepsilon \end{cases}$

Ie pour $x \in [c-\delta, c+\delta]$

$$\begin{cases} 0 < 1-\varepsilon \leq g(x) \leq 1+\varepsilon & (1) \\ (1+\varepsilon) h''(c) \dfrac{(x-c)^2}{2} \leq h(x) \leq (1-\varepsilon) h''(c) \dfrac{(x-c)^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Pour $t > 0$, en prenant $e^{t \times (2)} \times (1)$ et en intégrant sur $[c-\delta, c+\delta]$ ($c \in]a,b[$), on obtient :

$$(1-\varepsilon) \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{(1+\varepsilon) t h''(c) \frac{(x-c)^2}{2}} dx}_{I_1(t)} \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x) e^{t h(x)} dx \leq (1+\varepsilon) \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{(1-\varepsilon) t h''(c) \frac{(x-c)^2}{2}} dx}_{I_2(t)}$$

Or $I_1(t) \underset{u = x-c}{=} \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} e^{(1+\varepsilon) t h''(c) \frac{u^2}{2}} du \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\Psi(t)}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ (résultat préliminaire)

De même, $I_2(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\Psi(t)}{\sqrt{1-\varepsilon}}$

Par définition d'un équivalent, $\exists t_1 > 0$ tel que $\forall t \geq t_1$, on ait

$$\begin{cases} I_1(t) \geq (1-\varepsilon) \dfrac{\Psi(t)}{\sqrt{1+\varepsilon}} \\ I_2(t) \leq (1+\varepsilon) \dfrac{\Psi(t)}{\sqrt{1-\varepsilon}} \end{cases}$$

Finalement, $\forall t \geq t_1$:

$$\boxed{\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1+\varepsilon}}\, \varphi(t) \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x) e^{t h(x)}\, dx \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon}}\, \varphi(t)}$$

(iii) "Etude du reste" : vérifier que l'on peut effectivement négliger $\int_{c+\delta}^{b}$ et $\int_{a}^{c-\delta}$.

- Pour $\int_{c+\delta}^{b}$: h décroit sur $[c,b[$ et $h(c)=0$

posons $h(c+\delta) = -\mu < 0$

$(h(x)-h(c+\delta) \leq 0)$ $\quad h(x) + \mu \leq 0$ pour tout $x \geq c+\delta$

donc $\forall x \geq c+\delta \quad \forall t \geq 1 \quad t h(x) = (t-1) h(x) + h(x) \leq -(t-1)\mu + h(x)$

$$\underbrace{\left| \int_{c+\delta}^{b} g(x) e^{t h(x)}\, dx \right|}_{J_1(t)} \leq \left(\int_{c+\delta}^{b} |g(x)| e^{h(x)}\, dx \right) e^{-(t-1)\mu}$$

$$\leq C e^{-(t-1)\mu} \quad \text{où} \begin{cases} \mu > 0 \\ \text{et } e^{-(t-1)\mu} = \underset{[t \to +\infty]}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

d'où l'existence d'un réel $t_2 > 0$ tel que :

$$\underline{|J_1(t)| \leq \varepsilon \varphi(t)}$$

- On effectue le même raisonnement pour $\int_{a}^{c-\delta}$ et finalement, pour tout $t \geq \sup\{t_1, t_2\}$, on a :

$$\boxed{\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 2\varepsilon\right) \varphi(t) \leq I(t) \leq \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon}} + 2\varepsilon\right) \varphi(t)}$$

ce qui en vertu de la continuité des fonctions de ε qui interviennent prouve le théorème $\square$

Application (Formule de Stirling)

On veut trouver le comportement asymptotique lorsque $x \to +\infty$ de :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt = \int_0^{+\infty} e^{x \log t - t} \, dt$$

Comme il est dit précédemment, on cherche l'abscisse t du maximum de la fonction $h(t) = x \log t - t$ (c'est ce maximum qui va dicter le comportement de Γ en $+\infty$)

On a $h'(t) = \frac{x}{t} - 1$, le maximum est donc atteint en $t = x$.

Pour se ramener au cas où h atteint son maximum en une abscisse indépendante de x, on effectue le changement de variable $u = \frac{t}{x}$

On obtient $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x \log x} e^{x \log u - xu} x \, du$

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\log u - u)} \, du$$

La fonction $u \mapsto \log u - u$ atteint son maximum en $u = 1$

$\Longrightarrow$ (Méthode de Laplace) $\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{x+1} \times \sqrt{\pi} \, e^{-x} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \, e^{-x}$

En particulier pour $x = n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \, e^{-n} n^n$ $\square$

(F^{le} de Stirling)