224 Exemples de développements asymptotiques de Suites et de Fonctions

Cadre : I désigne un intervalle réel non réduit à un point, $a \in I$, f une fonction à valeurs réelles définie sur I, et $n \in \mathbb{N}$

I - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE FONCTIONS

1 - Développement limité

Def 1 : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a ($DL_n(a)$) : s'il existe une fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et une fonction ε définie sur I à valeurs réelles telle que $\forall x \in I$ $f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ • ou de manière équivalente, $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$

P est la partie régulière du $DL_n(a)$.

Th 2 : Si f admet un $DL_n(a)$, il est unique

Ex 3 : • fonctions polynomiales, • $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

Th 4 : f est continue (ou se prolonge par continuité) en a ssi elle admet un $DL_0(a)$
f est dérivable (ou se prolonge en une fct dérivable) en a ssi elle admet un $DL_1(a)$

Ctr ex 5 : $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \neq 0$, $f(0) = 0$; $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ mais n'est pas dérivable en 0.

Th 6 : (Taylor-Young). On suppose $a \in \mathring{I}$, si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a alors elle admet un $DL_n(a)$ donné par : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \underset{x \to a}{+ o}((x-a)^n)$

Ex 7 : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$; $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$; si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$:
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Rq 8 : Un $DL_n(a)$ donne les différentes dérivées de f en a

Rq 9 : On peut effectuer un chgt de variable dans les DL.

Ex 10 : $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k + o(x^n) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $\left.\frac{d^k(\cos\sqrt{x})}{dx^k}\right|_{x=0} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

En vertu de Rq 10, on étudiera seulement les DL en 0.

2 - Opérations sur les développements limités

Th 11 : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, admettant des $DL_n(0)$: $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$
Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $(f+\lambda g)(x) = P(x) + \lambda Q(x) + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$ de $f + \lambda g$
$fg(x) = R(x) + o(x^n)$ est un DL de fg avec $PQ(x) = R(x) + o(x^n)$.

Ex 12 : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$; $sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$

Th 13 : Supposons que f et g admettent des $DL_n(0)$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$
Alors, si $g(0) = Q(0) = 0$, $f \circ g$ admet pour DL : $f \circ g(x) = R(x) + o(x^n)$
avec $P(Q(x)) = R(x) + o(x^n)$

Ex 14 : $\sin(sh(x)) - sh(\sin(x)) = \frac{-1}{45} x^7 + \frac{1}{1575} x^{11} + o(x^{14})$

Cor 15 : Si f admet un $DL_n(0)$, et $f(0) \neq 0$, en écrivant $f(x) = f(0)(1 - g(x))$ on peut calculer un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0)} \times \frac{1}{1-g}$ par composition des DL de g et de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

Ex 16 : $f(x) = x + \ln(1+x)$, $\forall x > -1$; réalise un C^∞ difféomorphisme de $]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ et : $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$

3 - Développements asymptotiques

Def 17 : On appelle échelle de comparaison au voisinage de a un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de a (pas nécessairement en a) tel que :
- $\forall \varphi \in \mathcal{E}$, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x \in V \setminus \{a\}$, $\varphi(x) \neq 0$
- $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq \psi \Rightarrow \varphi = o(\psi)$ ou $\psi = o(\varphi)$

Ex 18 : • $((x-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$; • $((x-a)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$; • $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en $+\infty$;
$(x^\alpha \ln^\beta(x))_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$ en $+\infty$.

Def 19 : On dit que f admet un développement asymptotique (DA) au voisinage de a relativement à $\mathcal{E}$ si au voisinage de a (éventuellement privé de a) on a une écriture de la forme : $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) + \underset{a}{o}(\varphi_n(x))$
avec a_i des constantes et $\varphi_{i+1} = \underset{a}{o}(\varphi_i)$, $\varphi_i \in \mathcal{E}$.

Ex 20 : $\mathcal{E} = ((x^n)_{n \in \mathbb{N}})$; un DA au voisinage de 0 relativement à $\mathcal{E}$ est un $DL(0)$.

Th 21 : Si f admet un DA relativement à $\mathcal{E}$, il est unique

Ex 22 : $x^{1/x} = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \underset{\infty}{o}\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

224 Exemples de dev asymptotique de suites et de fonctions

II - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET INTÉGRATION

1- Intégration et dérivation de DL

Th 23 : Supposons f de classe C^1 au voisinage de 0. Si f' admet un DL de la forme : $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$ est un $DL_{n+1}(0)$ de f.

Ex 24 : • $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \underset{x\to0}{o}(x^n)$

• $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+1})$

Th 25 : Si f est C^1 au voisinage de 0, si f et f' admettent des $DL_n(0)$ et $DL_{n-1}(0)$ respectivement de parties régulières P et Q. Alors $Q = P'$.

Ex 26 : $\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k-1}{p-1} x^k + o(x^n)$

Ctr-ex 27 : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0)=0$. On a $f(x) = o(x^2)$ mais f' n'est pas dérivable en 0 et n'a donc pas de $DL_2(0)$.

DVP [Appli 28 : Étude de l'estimation de l'avance du périhélie de Mercure par DL.

Appli 29 : Stabilité des équilibres d'une EDO : $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on considère l'équation $y'(t) = f(y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. Si y_0 est asymptotiquement stable pour le système linéarisé $y'(t) = Df(y_0)(y - y_0)$. Alors, il l'est pour $y'(t) = f(y(t))$.

2- Sommation des relations de comparaison

Th 30 : Soient $a < b \le \infty$, soient f, g définies sur $[a,b[$, $g > 0$, f, g continues par morceaux sur $[a,b[$.

i) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors : si $f = \underset{b^-}{o}(g)$ alors $\int_a^x f(t)\,dt = \underset{b^-}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$

ii) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors : si $f = \underset{b^-}{o}(g)$ alors $\int_x^b f(t)\,dt = \underset{b^-}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$

Rq : Des résultats analogues existent avec des $\underset{b^-}{O}$ et des $\underset{b^-}{\sim}$.

Ex 31 : • On retrouve $\ln(x) = \underset{\infty}{o}(x^\alpha)$, $\alpha > 0$

• $\arccos(x) = \sqrt{2}\,(1-x)^{1/2} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1-x)^{3/2} + \underset{x\to1^-}{o}((1-x)^2)$.

Ctrex 32 : Si $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge et $\forall 1 < \alpha < \beta$, $\frac{1}{t^\beta} = o(\frac{1}{t^\alpha})$ mais $\left(\int_1^x \frac{dt}{t^\beta}\right)\left(\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}\right)^{-1} \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$

Ex 33 : $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!\,x}{\ln^2(x)} + \dots + \frac{n!\,x}{\ln^{n+1}(x)} + \underset{\infty}{o}\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right)$

Ex 34 : $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1!\,e^{-x}}{x^2} + \dots + \frac{(-1)^n n!\,e^{-x}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{e^{-x}}{x^{n+1}}\right)$

3- Étude d'intégrales à paramètres

DVP

Th 35, Méthode de Laplace : Soient $a < b \le \infty$; $\varphi \in C^2([a,b[, \mathbb{R})$. $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$, continue en a tq $f(a) \neq 0$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tq $e^{-t_0\varphi} f \in L^1(]a,b[)$. Alors : $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$ est définie $\forall t \ge t_0$ et :

1) si $\varphi'(a) > 0$, $F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} e^{-t\varphi(a)} f(a)$

2) si $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$, $F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$

Cor 36 : Stirling : $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-t} x^t\,dt \sim \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$

Ex 37 : $\int_0^\infty x^{-\alpha x} t^x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right)$, $\alpha > 0$.

Th 38, Méthode de la phase stationnaire : Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un unique $x_0 \in supp(a)$ tel que : $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$.

Alors : $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x)\,dx = e^{it\varphi(x_0)} \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|t}} a(x_0) + O(t^{-3/2})$, $t \ge 1$

avec ε = signe $(\varphi''(x_0))$.

Appli 39 : Fonction d'Airy : $Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$

Alors en $t \to -\infty$: $Ai(t) = 2\sqrt{\pi}\,|t|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-7/4})$

III - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES ET DE SÉRIES

1) Suites récurrentes

Th 40 : Méthode de Newton : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, C^2, tq $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. Alors, f s'annule en un unique point $a \in]c,d[$. Pour $x_0 \in [c,d]$, on définit la suite (x_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors :

- il existe $\alpha>0$ tq si $x_0 \in I=[a-\alpha,a+\alpha]$; alors $F(I)\subset I$ et (x_n) a une convergence d'ordre 2 vers a dans I : $\exists c>0, \forall n\geq 0, |x_{n+1}-a|\leq c|x_n-a|^2$
- Si de plus, $f''>0$ sur $[c,d]$, alors $I=[a,d]$ est stable par F, (x_n) est strictement décroissante ou constante et on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq x_{n+1}-a\leq c(x_n-a)^2$ et $x_{n+1}-a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$, si $x_0>a$.

Ex 41 : Soit $y>0$ et $a=\sqrt{y}$. Soient $0<c<d$ tq $c^2<y<d^2$. Pour $x_0\in\,]a,d]$, soit (x_n) définie par les itérations de $F(x)=x-\frac{x^2-y}{2x}$. Alors $0\leq x_n-a\leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$ $\forall n\geq 0$

Th 42 : Soit f définie et continue sur $]-1,1[$ tq $f(x)=x-\alpha x^{p+1}+\beta x^{2p+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2p+1})$ avec $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}^*$, $p>0$. Il existe $\eta>0$ tq $\forall x\in\,]0,\eta]$, $0<f(x)<x\leq\eta$ ce qui permet de définir (x_n) par $x_0\in\,]0,\eta]$ et $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\geq 0$ on a :

$$x_n=\frac{1}{\sqrt[p]{pn\alpha}}-\frac{\gamma\ln(n)}{p\alpha^2\sqrt[p]{p\alpha}\,n\sqrt[p]{n}}+\underset{\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt[p]{n}}\right)$$

2- Suites définies implicitement

Ex 43 : Soit (x_n) suite définie par $\forall n$, x_n est la solution dans $]n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}[$ de $\tan x=x$. Alors on a : $x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

Ex 44 : (x_n) définie par $\forall n$, $x_n\in\,]0,1[$ et $x_n^n-nx_n+1=0$ a pour équivalent : $x_n\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{n}$

Ex 45 : Si $\forall n$, x_n est la solution de $x_n^n-x_n-n=0$, avec $x_n>1$. Alors : $x_n=1+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

Ex 46 : $\forall n\geq 1$, $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ a un unique extremum, x_n, dans $[n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi]$. Alors $x_n=n\pi-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f(x_n)\sim\frac{(-1)^n}{n\pi}$

Ex 47 : $\forall n\geq 1$, on définit x_n la solution dans $]n\pi,n\pi+\frac{\pi}{4}[$ de $\tan x_n-\operatorname{th} x_n=0$. Alors : $x_n=n\pi+\frac{\pi}{4}-e^{-\pi/2}e^{-2n\pi}+\underset{\infty}{o}(e^{-2n\pi})$

3- Application des DA à l'étude des séries

Th 48 : Soit f décroissante positive sur $\mathbb{R}_+$ et continue. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)\geq\int_0^{n+1}f(t)\,dt\geq\sum_{k=1}^{n+1}f(k)$$

Ex 49 : $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; alors $H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\gamma\in\mathbb{R}$

Th 50 : Soient $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs : i) Si $\sum v_k$ diverge alors :

si $u_n=\underset{\infty}{o}(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n}u_k=o\left(\sum_{k=0}^{n}v_k\right)$

ii) Si $\sum v_k$ converge alors :

si $u_n=\underset{\infty}{o}(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k=o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k\right)$

Rq : Ces résultats restent vrais pour $u_n=O(v_n)$ et $u_n\sim v_n$.

Contre ex 51 : $\forall n\geq 2$, $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ on a $u_n\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais la série de terme général (u_n) diverge.

Th 52 : (Raabe-Duhamel). Soit (u_n) suite de $\mathbb{R}_+^*$ tq $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$. Alors $u_n\sim\frac{\lambda}{n^a}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ ie la série $\sum u_n$ converge si $a>1$.

Ex 53 : la série de terme général $u_n=\frac{2\times 4\times\dots\times(2n-2)}{3\times 5\times\dots\times(2n-1)}$ est divergente.

4- Formule d'Euler Mac-Laurin

Def 54 : On pose $B_0=1$, $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$, $\forall n\geq 2$ $B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$ et $\int_0^1 B_n(x)\,dx=0$
$\forall n\geq 1$, on note $b_n=B_n(0)$.
(B_n) sont les polynômes de Bernoulli, (b_n) les nombres de Bernoulli

Th 55 : i) $\forall n\geq 1$, $\forall x\in[0,1]$, $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k x^{n-k}$
ii) $\forall n\geq 2$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$
iii) $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$ $\forall n\geq 1$
iv) $b_n=0$ si n impair ≥ 3.

Th 56 : Formule d'Euler Mac Laurin : Soit $f\in\mathcal{C}^{k}([\alpha,\beta])$; $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$; Soit $T(f)=\frac{1}{2}f(\alpha)+f(\alpha+1)+\dots+f(\beta-1)+\frac{1}{2}f(\beta)$. Alors :

$$T(f)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\sum_{i=1}^{k}\frac{b_{2i}}{(2i)!}\left(f^{(2i-1)}(\beta)-f^{(2i-1)}(\alpha)\right)-\int_\alpha^\beta\frac{B_{2k}(x)}{(2k)!}f^{(2k)}(x)\,dx$$

Ex 57 : $\forall p\geq 1$, $H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{b_{2k}}{2k}\frac{1}{n^{2k}}+\underset{\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

Appli 58 : Erreur dans la méthode de quadrature des trapèzes : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, continue ; $N\geq 1$ et $h=\frac{b-a}{N}$. On définit $x_k=a+kh$, $k\in[0,N]$
Notons $E(f)=\int_a^b f(x)\,dx-h\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{N-1})+\frac{1}{2}f(x_N)\right)$.
Si $f\in\mathcal{C}^{2p}$ Alors :

$$|E(f)|\leq\frac{4\pi}{2p-1}\frac{(b-a)}{(2\pi)^{p}}\|f^{(2p)}\|_\infty h^{2p}$$

Références :

oui Rouvière, <u>Petit guide de calcul différentiel</u>

oui Rombaldi, <u>Éléments d'analyse réelle</u>

oui Queffélec et Zuily, <u>Analyse pour l'agrégation</u>

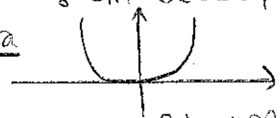
oui Gourdon, <u>Analyse</u>

<u>Questions</u>

<u>Dev Laplace</u>

(1) Hyp φ strict $\nearrow$, que se passe-t-il si on prend φ = carré (par ex) ?
on découpe l'int en deux, et on se ramène au cas précédent

<u>ex</u>



(2) On a un $\mathcal{C}^1$-diff ~~ligne~~ dans cas gén ?

<u>Sur le plan</u>

- Dev asymp / lim = la différence ?
ex de fct dont on peut pas faire dev lim mais asymp si ?
$x \mapsto e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$

- Diff entre méthode Laplace et méthode Laplace stationnaire ?

$f : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} a(x)dx$, supp a int

Supp $a \in S(\mathbb{R})$, que peut-on dire de f ?

$\longrightarrow$ régularité

$\longrightarrow$ en terme de S ? $f \in S(\mathbb{R})$ aussi

$\langle e^{itx^2}, a \rangle_{L^2_x} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} e^{i\xi x} dx$?

Méthode de Laplace

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, ex 113

φ strict ↗

Théorème.

Soient $a < b \leqslant \infty$, $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b[$ [a] avec $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue en a telle que $f(a) \neq 0$. On suppose de plus qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-t_0\varphi} f \in L^1([a,b[)$, alors l'intégrale $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x$ est définie pour $t \geqslant t_0$ et

1. si $\varphi'(a) > 0$, alors $F(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi'(a)} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}$,
2. si $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$.

[a] C'est à dire φ est la restriction d'une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert contenant $[a,b[$.

Démonstration. On peut supposer $t_0 = 0$. En effet, il suffit de poser $\tilde{f} = e^{-t_0\varphi} f$ et on a l'énoncé voulu.

• L'intégrale F est bien définie.
En effet, φ est croissante, donc pour $t \geqslant 0$,

$$\left|e^{-t\varphi(x)} f(x)\right| \leqslant e^{-t\varphi(a)} |f(x)| \in L^1.$$

com^t a => com^t sur petit voisin de a

• Commençons par étudier deux exemples : commençons par $a = 0$ et $\varphi(x) = x$.
La continuité de f en 0 donne l'existence de $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $|f| \leqslant M$ sur $[0,\alpha]$. Alors pour $t > 0$, on a

int de 0 à α

$$t\int_0^\alpha e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-y} f(0)\mathrm{d}y = f(0).$$

$x = \frac{y}{t}$

Le passage à la limite est justifié par le théorème de convergence dominée car $\left|e^{-y} f(\frac{y}{t})\mathbb{1}_{[0,t\alpha]}\right| \leqslant Me^{-y} \in L^1([0,\infty[)$.
Puis comme $f \in L^1$, on a

cste de α à b.

le reste

$$t\left|\int_\alpha^b e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \underbrace{te^{-t\alpha}}_{\to 0}\underbrace{\int_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{< +\infty} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a bien

$$\int_0^b e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x \sim \frac{f(0)}{t}.$$

exemple

Continuons avec un autre exemple : supposons que $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$.
Par la même méthode que précédemment, on a pour $t > 0$

$$\sqrt{t}\int_0^\alpha e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{t}\alpha} e^{-y^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-y^2} f(0)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0).$$

Puis

$$\sqrt{t}\left|\int_\alpha^b e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t\alpha^2}\int_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x \sim \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}.$$

• Étudions à présent le premier cas du théorème : $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$.
L'idée est de se ramener aux cas vus en exemple.

1er exemple

On pose donc naturellement le changement de variable $u = \varphi(x) - \varphi(a)$ (Comme φ est strictement croissante, on obtient bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.) et on note ψ sa bijection réciproque. Alors on a

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x) \mathrm{d}x = e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\psi^{-1}(b)} e^{-tu} f(\psi(u))\psi'(u) \mathrm{d}u \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\psi'(0)}{t}.$$

Or $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \dfrac{1}{\varphi'(\psi(0))} = \dfrac{1}{\varphi'(a)}$, donc on a bien

$$\boxed{F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}.}$$

- Il reste enfin le deuxième cas à traiter : $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$.

2ème ex

On pose ici $u = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$. On a bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme par théorème d'inversion globale car φ est strictement croissante. On note à nouveau ψ l'inverse.
On a alors

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x) \mathrm{d}x = e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\psi^{-1}(b)} e^{-tu^2} f(\psi(u))\psi'(u) \mathrm{d}u \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi} f(\psi(0))\psi'(0)}{2\sqrt{t}}.$$

On sait que $\psi(0) = a$, puis

$$(\psi^{-1})'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2 \varphi''(a)/2}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}.$$

Donc $\psi'(0) = \dfrac{1}{(\psi^{-1})'(\psi(0))} = \sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$ et on retrouve le résultat annoncé :

$$\boxed{F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.}$$

□

Corollaire (Formule de Stirling)

On a

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}.$$

Démonstration. On a

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t \mathrm{d}x.$$

Pour faire apparaître la forme du théorème, on applique le changement de variable $x = t(u+1)$ pour $t > 0$, ainsi on a

$$\Gamma(t+1) = \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1)} t^t (u+1)^t t \mathrm{d}u = t^{t+1} \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1-\ln(u+1))} \mathrm{d}u.$$

On pose $f = 1$ et $\varphi(u) = u + 1 - \ln(u+1)$. Alors $\varphi'(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u}$ et $\varphi''(u) = \dfrac{1}{(1+u)^2}$.
On remarque que $\varphi' > 0$ sur $]0, \infty[$, donc en appliquant le théorème, on a

$$\int_0^\infty e^{-t(u+1-\ln(u+1))} \mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(0)}} \times \frac{e^{-t\varphi(0)} f(0)}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

Puis en faisant le changement de variable $v = -u$ dans la seconde intégrale, on a

$$\int_{-1}^0 e^{-t(u+1-\ln(u+1))} \mathrm{d}u = \int_0^1 e^{-t(1-v-\ln(1-v))} \mathrm{d}v.$$

On pose $\tilde{\varphi}(v) = 1 - v - \ln(1-v)$ et on remarque que le théorème s'applique. On obtient alors

$$\int_{-1}^0 e^{-t(u+1-\ln(u+1))} \mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

D'où il vient

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} 2t^{t+1} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} = \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}.$$

□

Remarques : • On a un résultat similaire pour les intégrales du type $\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) \mathrm{d}x$. On appelle cela la méthode de la phase stationnaire. Le lecteur intéressé pourra regarder le Zuily, Queffelec ou le Zuily.
• Ce développement semble un peu obscure sans l'expliquer un peu. Il faut se dire que φ est croissante et qu'en conséquence, comme l'exponentielle décroît vite, la valeur de l'intégrale est concentrée en $[a, a+\epsilon[$. On applique alors des formules de Taylor pour voir ce que l'intégrale donne.

Développement ? : un calcul de l'avance du périhélie de Mercure

Voir Rouvière p.236 (édition 2003) exercice 79.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$$

où $a < b$ sont des réels fixés et $\varepsilon > 0$ un paramètre.

Pour $\varepsilon = 0$, l'équation $f(0, x)$ a pour solutions a et b sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il pour l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $f(\varepsilon, x) = 0$ a trois racines distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Démontrons alors le développement asymptotique

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(\varepsilon, x)}} = \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + \underset{\varepsilon \to 0}{O}(\varepsilon^2).$$

Motivation : Cette intégrale apparaît en physique dans l'étude des planètes. Plus précisément, le terme d'ordre ε, qui provient d'une correction relativiste, a permis d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure de 43 secondes d'arc par siècle.

Preuve. On sait que $f(0, a) = 0$ et $\partial_x f(0, a) = b - a > 0$ donc, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V_1 de 0, un voisinage ouvert W_1 de a et une fonction $x_1 \in \mathcal{C}^\infty(V_1, W_1)$ tels que

$$(\varepsilon, x) \in V_1 \times W_1 \text{ et } f(\varepsilon, x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon \in V_1 \text{ et } x = x_1(\varepsilon).$$

On sait que $x_1(0) = a$ et en dérivant la relation

$$\forall \varepsilon \in V_1, \qquad 0 = f(\varepsilon, x_1(\varepsilon))$$

il vient

$$(-2x_1(\varepsilon) + a + b + 3\varepsilon x_1(\varepsilon)^2)x_1'(\varepsilon) + x_1(\varepsilon)^3 = 0$$

d'où l'on déduit

$$x_1'(0) = \frac{-a^3}{b-a}.$$

Alors, d'après le théorème de Taylor-Young,

$$x_1(\varepsilon) = a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

En permutant a et b, on obtient un voisinage ouvert V_2 de 0, un voisinage ouvert W_2 de b et une fonction $x_2 \in \mathcal{C}^\infty(V_2, W_2)$ tels que

$$(\varepsilon, x) \in V_2 \times W_2 \text{ et } f(\varepsilon, x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon \in V_2 \text{ et } x = x_2(\varepsilon)$$

et

$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

De plus,

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = \varepsilon x^3 - x^2 + (a+b)x - ab$$

donc, d'après les relations coefficients-racines, la troisième racine $x_3(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ de f vérifie

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

d'où

$$\mathbb{R} \ni x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2 + ab + b^2)\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a donc trois solutions distinctes.

En notant $x_i = x_i(\varepsilon)$ pour $i = 1, 2, 3$, on remarque que

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = (x - x_1)(x_2 - x)(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2))$$

de sorte que

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2))^{-1/2}}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}} \mathrm{d}x.$$

En posant $u = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $v = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$ et en effectuant le changement de variables $x = u + v\sin t$, on obtient

$$I(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \varepsilon(3u + v\sin t))^{-1/2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après les développements limités précédents,

$$3u + v\sin t = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2}\sin t + r(\varepsilon, t)$$

avec $|r(\varepsilon, t)| \leq C\varepsilon$ uniformément en t car $|\sin t| \leq 1$. De plus, d'après le théorème de Taylor-Lagrange,

$$\forall |x| \leq \frac{1}{2}, \qquad (1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}z + \alpha\frac{z^2}{2}$$

avec $|\alpha| \leq 3\sqrt{2}$ (en majorant la dérivée seconde). Il en découle que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$(1+\varepsilon(3u+v\sin t))^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(3u+v\sin t) + s(\varepsilon,t)$$

avec $|s(\varepsilon,t)| \leq C\varepsilon^2$ uniformément en t car $|\sin t| \leq 1$.

Ainsi, grâce à l'uniformité en t des majorations de $r(\varepsilon,t)$ et $s(\varepsilon,t)$,

$$I(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{3}{4}(a+b)\varepsilon + \frac{b-a}{4}\varepsilon\sin t\right) \mathrm{d}t + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2)$$

et finalement,

$$I(\varepsilon) = \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$