224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

Cadre : Soit (X,d) un espace métrique, $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn

I] Généralités

1) Relations de comparaisons

[GOU]

Déf 1 : Soient f et g deux applications de $D\subset X$ vers E et x_0 un point d'accumulation dans D.

- On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 si $\exists C>0, \exists V\in\mathcal{V}(x_0), \forall x\in V\cap D, \|f(x)\|\leq C\|g(x)\|$
  On note alors $f(x) = O_{x\to x_0}(g(x))$.
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\forall \varepsilon>0, \exists V\in\mathcal{V}(x_0), \forall x\in V\cap D, \|f(x)\|\leq \varepsilon\|g(x)\|$
  On note $f(x) = o_{x\to x_0}(g(x))$.
- On dit que f et g sont équivalentes en x_0 si $f(x)-g(x) = o_{x\to x_0}(g(x))$. On note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Rq 2 : En pratique, on utilisera souvent ces notations pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de l'infini, ou bien pour des suites réelles ou complexes lorsque $n\to+\infty$.

[ROM]

Th 3 : (croissance comparée) Pour tout réel $\alpha,\beta,\gamma>0$, on a $(\ln x)^\alpha = o_{x\to+\infty}(x^\beta)$ et $x^\beta = o_{x\to+\infty}(e^{\gamma x})$

Prop 4 : Les fonctions considérées sont définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement privé de a, on a :

a) $f=o_{a}(1)$ si et seulement si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} 0$

b) $f=O_{a}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

c) Si $f=o(g)$ et $h=o(g)$, alors pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda f+\mu h=o(g)$

d) Si $f=O(g)$ et $h=O(g)$, alors pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda f+\mu h=O(g)$

e) Si $f=O(g)$ et $h=o(k)$, alors $fh=o(gk)$

f) Si $f\sim g$ et $h\sim k$, $fh\sim gk$

g) Si $f\sim g$ et $h\sim k$, et si g et k positives au voisinage de a, $f+h\sim g+k$

Rq 5 : Dans la pratique, si g ne s'annule pas :

- $f(x) = o_{x\to a}(g(x)) \iff \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$
- $f(x) = O_{x\to a}(g(x)) \iff f/g$ est bornée au voisinage de a
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$

[ROM]

C-ex 6 : $x+2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, $-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ mais $1 \not\sim 2$

2) Développements limités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton

Déf 7 : Soit $f : I\to\mathbb{R}$, I contenant 0. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n en 0 s'il existe $a_0,\dots,a_n\in E$ tels que $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o_{x\to0}(x^n)$.

Rq 8 : on peut définir les DL en un point quelconque $a\in\overline{I}$ (en développant par rapport à des termes de la forme $(x-a)^k$, ou $1/x^k$ si $a=\pm\infty$).

Ex 9 : $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2/2+\dots+x^n/n+o_{x\to0}(x^n)$

$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2/2+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o_{x\to0}(x^n)$

[GOU]

Prop 10 : Un DL est unique

Rq 11 : on peut sommer, multiplier, et faire des compositions de DL $\in\mathbb{N}^*$

Prop 12 : Soit $a>0$, $f :]-a,a[\to E$ admettant un DL d'ordre n en 0 :
$f(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o_{x\to0}(x^n)$

a) Si f est paire, les termes a_k d'indice k impairs sont nuls.

b) Si f est impaire, les termes a_k d'indice k pairs sont nuls.

Th 13 : a) La fonction f est continue (ou se prolonge par continuité) en a si et seulement si elle admet un DL d'ordre 0 en a.

b) La fonction f est dérivable (ou se prolonge en une fonction dérivable) en a si et seulement si elle admet un DL d'ordre 1 en a.

C-ex 14 : $x\mapsto\begin{cases}x^3\sin(1/x) & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ admet un DL d'ordre 2 en 0 mais n'est pas 2 fois dérivable.

[ROM]

Th 15 : (Taylor-Young) Si f est dérivable à l'ordre n en a, alors elle admet un DL à l'ordre n en a.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

Ex 16 :
- $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$
- $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

[GOU]

Appli 17 : Théorème central limite

Appli 18 : (estimation de l'erreur dans la méthode des rectangles) [ROM]
Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$, et pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $S_m(f) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(\frac{k}{m})$ sa somme de Riemann. Alors $S_m(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2m}[f(1)-f(0)] + \frac{1}{12m^2}[f'(1)-f'(0)] + O(\frac{1}{m^3})$

Prop 19 : Soit $f : I \to E$ dérivable sur I et $a \in I$ tel que $f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$. Alors f admet un DL d'ordre $m+1$ en a et $f(x) = f(a) + a_0 x + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_m}{m+1}(x-a)^{m+1} + o((x-a)^{m+1})$ [GOU]

Ex 20 : $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^m}{m} + o(x^m)$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+1})$

Appli 21 : (limite de forme indéterminée) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$

3) Développements asymptotiques

Def 22 : Soit $x_0 \in X$, on appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 dans X (sauf éventuellement en x_0), et vérifiant : si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ou $f = o(g)$ ou $g = o(f)$.

Ex 23 : Au voisinage de $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle :
$\mathcal{E}_1 = \{x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x \mapsto x^\alpha(\log x)^\beta, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{E}_3 = \{x \mapsto x^\alpha(\log x)^\beta e^{\gamma x}, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

Def 24 : Soient $f : D \subset X \to E$, x_0 point d'accumulation de D dans X et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de x_0 toute expression de la forme $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ vérifiant : [GOU]

i) $c_1, \dots, c_k \in E$

ii) $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$, et pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $f_i(x) = o_{x\to x_0}(f_{i+1}(x))$

iii) $f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) + o_{x\to x_0}(f_k(x))$.

Rq 25 : un développement asymptotique est unique, et un DL est un développement asymptotique

Ex 26 : Soit $x > 0$, $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}(\frac{\ln x}{x})^2 + o_{x\to 0}((\frac{\ln x}{x})^2)$ [ROM]

II] Développements asymptotiques de fonctions

1) Intégration des relations de comparaisons [GOU]

Th 27 : Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), E un $\mathbb{R}$-espace de Banach, $f : [a,b[\to E$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ continues par morceaux sur $[a,b[$.

a) Supposons que $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors lorsque $x \to b^-$
- si $f = O(g)$, alors $\int_a^x f(t)\,dt = O(\int_a^x g(t)\,dt)$
- si $f = o(g)$, alors $\int_a^x f(t)\,dt = o(\int_a^x g(t)\,dt)$
- Si $f \sim g$, alors $\int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt$

b) Supposons que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors lorsque $x \to b^-$
- si $f = O(g)$, alors $\int_x^b f(t)\,dt = O(\int_x^b g(t)\,dt)$
- si $f = o(g)$, alors $\int_x^b f(t)\,dt = o(\int_x^b g(t)\,dt)$
- si $f \sim g$, alors $\int_x^b f(t)\,dt \sim \int_x^b g(t)\,dt$

Appli 28 : au voisinage de $+\infty$, pour $\alpha > 0$, $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^{1-\alpha}})$, et donc $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} = o(\int_1^x t^{\alpha-1}\,dt) = o(x^\alpha)$

2) Méthode de Laplace [Z-Q]

Th 29 : (Méthode de Laplace) Soit $I =]a,b[$ un intervalle (borné ou non), $\varphi \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$. On suppose

i) $\int_a^b e^{t\varphi(x)}|f(x)|\,dx < +\infty \quad \forall t > 0$

ii) φ' s'annule en un seul point x_0 de I et $\varphi''(x_0) < 0$
(donc x_0 est un maximum absolu strict.

iii) $f(x_0) \neq 0$

Alors $\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)\, t^{-1/2}$

Appli 30 : (formule de Stirling)

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$$

3) Nombre de zéros des solutions d'une équation différentielle [Z-Q]

Lemme 31 : (de relèvement) Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$, sans zéro commun, et soit $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Si $y_1(a)+iy_2(a) = r_0 e^{i\theta_0}$, on peut écrire $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, où $r,\theta \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont donnés par $r=\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ et $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\,dt$.

Th 32 : Soit $a\in\mathbb{R}$ et $q \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ strictement positive et telle que $\int_a^{+\infty}\sqrt{q(u)}\,du = +\infty$ et $q'(x) = o_{x\to+\infty}\left(q(x)^{3/2}\right)$. Soit y une solution réelle non nulle de $y''+qy=0$ sur $[a;+\infty[$, alors **DEV 1**

$$N(x) = \#\{t\in[a,x],\ y(t)=0\} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$$

III] Développements asymptotiques de suites

1) Sommation des relations de comparaisons

Th 33 : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, avec $b_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Si $\sum b_n$ converge :
- si $a_n = O_{n\to+\infty}(b_n)$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = O_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$
- si $a_n = o_{n\to+\infty}(b_n)$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$
- si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$

b) Si $\sum b_n$ diverge :
- si $a_n = O_{n\to+\infty}(b_n)$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = O_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$
- si $a_n = o_{n\to+\infty}(b_n)$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = o_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$
- si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$

C-ex 34 : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge, mais $\sum u_n$ diverge.

Appli 35 : $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$

2) Formule d'Euler-Mac-Laurin

Th 36 : (Formule d'Euler Mac-Laurin) Soient $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $m<n$, $r\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{C}^r([m,n],\mathbb{C})$, on a **DEV 2**

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right] + R_r$$

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t)\, f^{(r)}(t)\,dt$, avec

$(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les nombres de Bernoulli et $(\tilde{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les polynômes de Bernoulli prolongés par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$. [GOU] et [DEM]

Appli 37 : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \times \frac{1}{n^k} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^r}\right)$

Appli 38 : (estimation de l'erreur dans la méthode des trapèzes) Soit $f\in\mathcal{C}^\infty([\alpha,\beta])$, on considère la subdivision de $[\alpha,\beta]$ en p sous intervalles égaux, $h=\frac{\beta-\alpha}{p}$ et on note

$$T_f(h) = h\left(\frac{1}{2}f(\alpha) + f(\alpha+h) + \dots + f(\beta-h) + \frac{1}{2}f(\beta)\right)$$

la somme des trapèzes associés. Alors

$$T_f(h) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \sum_{k=2}^{r} \frac{h^k b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(\beta) - f^{(k-1)}(\alpha)\right] + o(h^r)$$

[DEM]

3) Autres exemples

Th 39 : (Raabe-Duhamel) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives et telle que

Ex 40 : (une suite définie implicitement) Soit $n\geq 1$, la fonction $f : x \to \frac{\cos x}{x}$ a un unique extremum dans $[n\pi - \pi/2, n\pi]$ en un point noté x_n. Alors $x_n = n\pi - \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}(1/n)$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n/n\pi$ [ROM]

Ex 41 : (une suite définie par récurrence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n^{\alpha}$ $(\alpha>-1)$.
Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} [n(\alpha+1)]^{1/(\alpha+1)}$ [GOU]

Ref : [GOU] Analyse, Gourdon
[ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
[Z-Q] Analyse pour l'agrégation, Zuily Queffélec
[DEM] Analyse numérique et equations différentielles, Demailly
[HAU] Les contres exemples en mathematiques, Hauchecorne