226 - COMPORTEMENT D'UNE SUITE RÉELLE OU VECTORIELLE DÉFINIE PAR $u_{n+1}=f(u_n)$. EXEMPLES.

I - Introduction.

1. Motivations.

⊕ Modélisation de l'évolution d'une population.

__Exemple I.1.1.__ La __suite logistique__; définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \lambda u_n(1-u_n)$.

__Exemple I.1.2.__ La __suite de Fibonacci__, définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

⊕ Résolution approchée d'équations du type $f(x)=0$ ou $f(x)=x$.

[X] __Exemple I.1.3.__ La __méthode de Héron__ permet d'approcher la racine carré d'un nombre x par la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right)$.

2. Problèmes de définition.

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f. Il est possible de __définir correctement__ une suite par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée de u_0 __seulement si__ :

$$u_0 \in D_f - \{x \in D_f \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) \notin D_f\}$$

[L] __Exemple I.2.1.__ Pour $f(x) = \frac{3}{x-2}$ et $u_0 = \frac{20}{7}$ la suite (u_n) n'est pas définie à partir du rang 3.

En pratique, on se contentera de $A \subset D_f$ tel que $f(A) \subset A$. Dans le cas réel, on recherchera un intervalle stable.

⚠ Il existe des fonctions n'ayant aucun intervalle stable.

__Exemple I.2.2.__ Soit $f : [a,b] \ni x \longmapsto 2x$. Alors il n'existe pas d'intervalle stable pour f.

II - Comportement d'une suite récurrente réelle.

Dans toute cette partie on considère $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0.

1. Suites récurrentes et points fixes.

__Proposition II.1.1.__ Si $f \in \mathcal{C}^0(D_f, \mathbb{R})$ et $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in D_f$. Alors $f(l) = l$.

⚠ L'hypothèse $l \in D_f$ est nécessaire.

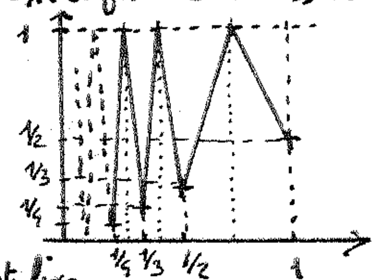
__Exemple II.1.2.__ Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$; $f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right) = 1$

et affine par morceaux.

f $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1]$ mais pas prolongeable par $\mathcal{C}^0$ en 0.

Alors, pour $u_0 = 1$, $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ pas point fixe.



2. Utilisation de la monotonie de f.

__Proposition II.2.1.__

Si f est croissante, (u_n) est monotone.
Si f est décroissante (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. [P]

__Illustration II.2.2.__

__fig. 1.__ $f \nearrow$ $u_0 < u_1 \to (u_n) \nearrow$ et $v_0 > v_1 \to (v_n) \searrow$

__fig. 2.__ $f \searrow$ $(u_{2n}) \nearrow$ $(u_{2n+1}) \searrow$

__fig. 1__

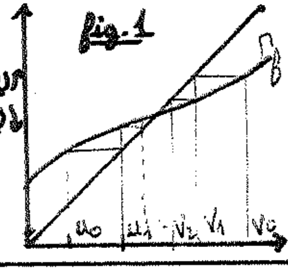
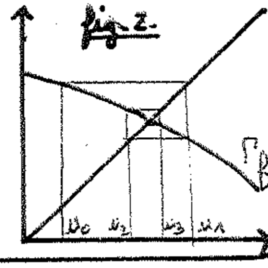


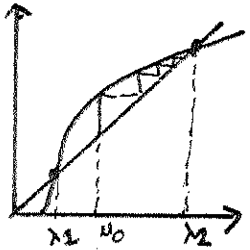
__fig. 2.__



3. Critères de convergence si f continue.

[P]

Proposition II.3.1. Si f est croissante continue et possède deux points fixes consécutifs $\lambda_1 < \lambda_2$, alors $\forall u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$, (u_n) converge
- vers λ_1 si $f(x) < x$ sur $]\lambda_1, \lambda_2[$
- vers λ_2 si $f(x) > x$ sur $]\lambda_1, \lambda_2[$



[X]

Proposition II.3.2 Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$, alors (u_n) converge ssi $\lim\limits_{n\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$

4. Classification des points fixes, f de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans cette section, on considère $f \in \mathcal{C}^1(I, I)$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et λ un point fixe de f.

Théorème II.4.1 [Classification des points fixes].

[D]

- Si $|f'(\lambda)| < 1$, on dit que λ est attractif et $\exists V \in \mathcal{V}(\lambda)$, $f(V) \subset V$ et $\forall u_0 \in V \quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \lambda$
- Si $|f'(\lambda)| > 1$ on dit que λ est répulsif et si (u_n) converge vers λ, elle stationne en λ
- Si $|f'(\lambda)| = 1$ on ne peut pas conclure. cf annexe

Proposition II.4.2. [Vitesse de convergence].

[D]

Dans le cas $|f'(\lambda)| < 1$. Soit k tq $|f'(\lambda)| < k < 1$

on a une convergence : $|u_n - \lambda| \leq k^n |u_0 - \lambda|$

Si $f'(\lambda) = 0$ et qu'on suppose en plus f $\mathcal{C}^2$ et $|f''(\lambda)| \leq M$ sur V on a $|u_n - \lambda| \leq \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|u_0-\lambda|\right)^{2^n}$

III. Etude d'un exemple : les suites homographiques.

Définition III.1. On appelle fonction homographique réelle toute fonction $h : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$ définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

1. Cas affine. $c=0$.

Dans ce cas la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ est bien définie pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$. C'est une suite arithmético-géométrique
- Si $a=1$ c'est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b=0$ c'est une suite géométrique de raison a.
- Sinon on pose $(v_n) = (u_n - \frac{b}{a-1})$ qui est géométrique de raison a

2. Cas des homographies. $c \neq 0$ [DEV]

On pose $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. $u_0 \in \mathbb{R}$ tq $h^n(u_0) \in \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ [L]
- si $\Delta > 0$ et $a+d \neq 0$ (u_n) cv vers le point fixe attractif de h
- si $\Delta > 0$ et $a+d = 0$ (u_n) périodique de période 2.
- si $\Delta = 0$ (u_n) converge vers l'unique point fixe
- si $\Delta < 0$ (u_n) diverge.

IV - Comportement d'une suite récurrente vectorielle.

1 - Théorèmes de points fixes.

Théorème IV.1.1. [Point fixe de Banach] Soit (E, d) métrique

> Soit $f : E \longrightarrow E$ et $A \subset E$ une partie complète de E telle que $f(A) \subset A$. Si f est strictement contractante de rapport $k < 1$. Alors f possède un unique point fixe $\lambda \in A$ et $\forall a \in A$ la suite définie par
> $$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$$ converge vers λ
> de plus, on a $d(u_n, \lambda) \leq k^n d(u_0, \lambda)$

[D]

Remarque IV.1.2. Le théorème reste valable si on remplace f strictement contractante par f $\mathcal{C}^0$ et $\exists m$, f^m soit strictement contractante.

Remarque IV.1.3. On peut affaiblir l'hypothèse sur f en f contractante de rapport $k = 1$ à condition de supposer en plus A compacte.

2 - Critère d'attractivité dans $\mathbb{R}^n$

Définition IV.2.1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On appelle rayon spectral de u la quantité $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$

[D]

Théorème IV.2.2. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sur $\mathbb{R}^n$, alors on a $\boxed{\rho(u) = \inf\limits_{N \in \mathcal{N}} |||u|||_N .}$ $(*)$

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. N norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $Df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la différentielle de f en x. Alors comme

$(\forall x \in C$ convexe, $|||Df_x|||_N < k) \Rightarrow (f$ k-lipschitzienne sur $C)$ [D]

$(*)$ nous permet de donner un critère d'attractivité pour un point fixe λ de f :

Théorème IV.2.3. Soit $\lambda \in \Omega$ point fixe de f. Il équivalent

> (i) $\exists V \in \mathcal{V}(\lambda)$, $f(V) \subset V$ et $\exists N \in \mathcal{N}$, $f_{|V}$ contractante pour N
> (ii) $\rho(Df_\lambda) < 1$. On dit alors que <u>λ est attractif</u>.

[D]

Remarque IV.2.4. Si f $\mathcal{C}^2$ et $Df_\lambda = 0$ on dispose (Taylor) de $M \geq 0$, $N(f(x) - a) \leq M N(x-a)^2$ on parle alors de <u>point super attractif</u>.

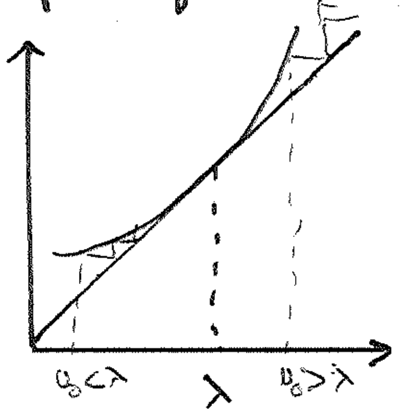
3. Exemple : les suites récurrentes linéaires

Définition IV.3.1. On appelle <u>suite récurrente linéaire</u> d'ordre d une suite définie par une relation du type
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i} \ , \quad (a_i)_{0 \leq i \leq d-1} \in \mathbb{C}^d$$

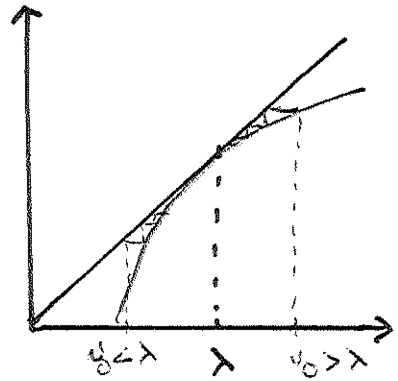
Remarque IV.3.2. C'est en fait une suite récurrente vectorielle du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème IV.3.3. [Théorème de structure des suites récurrentes linéaires. [DEV]] [X]

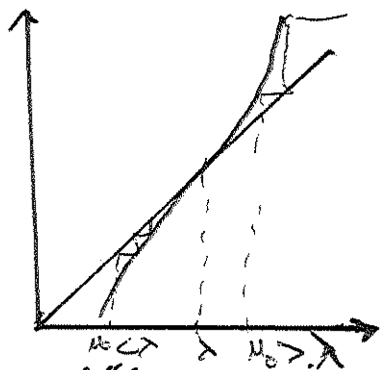
ANNEXE : Quelques situations possibles autour des points fixes : + $f(\lambda)=\lambda$ et $f'(\lambda)=1$



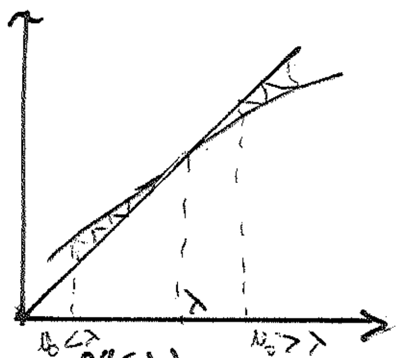
$f''(\lambda)>0$



$f''(\lambda)<0$

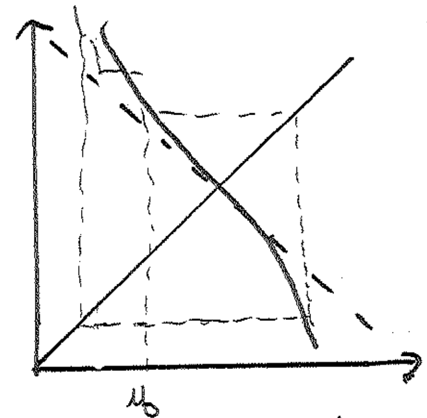


$f''(\lambda)=0$
$f'''(\lambda)>0$

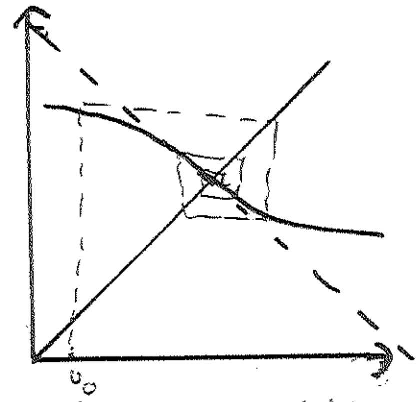


$f''(\lambda)=0$
$f'''(\lambda)<0$

+ $f(\lambda)=\lambda$ et $f'(\lambda)=-1$



"colimaçon répulsif"



"colimaçon attractif"

AUTRES POSSIBILITÉS.

- Orbites et cycles, théorème de Sarkowski.
- analyse numérique, méthode de Newton.

BIBLIOGRAPHIE.

[D] J.-P. Demailly - analyse numérique et éq diff.
[L] T. Lambre - L'épreuve sur dossier à l'oral du capes.
[P] A. Pommelet - Analyse pour l'agrégation.
[X] S.F., H.G., S.N. - Oraux X-ENS - analyse 1.